Énoncé

Montrer que $[0,1]$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Correction

On doit exhiber une bijection entre $[0,1]$ et $\mathbb{R}$. Le 1er réflexe est de chercher parmi les fonctions usuelles une fonction qui pourrait convenir.

Etape 1 : Utilisation de la fonction tangente

Après avoir fait le tour des fonctions usuelles, exp, ln, cos... On peut penser à la fonction tangente qui est une bijection entre $]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$. Si on arrive à mettre [0,1] et$]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}[$ en bijection, on pourra conclure car une composée de bijections est une bijection.

Etape 2 : Bijection entre intervalles de même type

En faisant un dessin, on voit immédiatement que [0,1] est en bijection avec $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Par ailleurs, tous les intervalles réels de même type sont en bijection. Bien qu'elle ne permette pas de conclure, cette propriété nous rapproche de la solution. Exhibons une telle bijection.

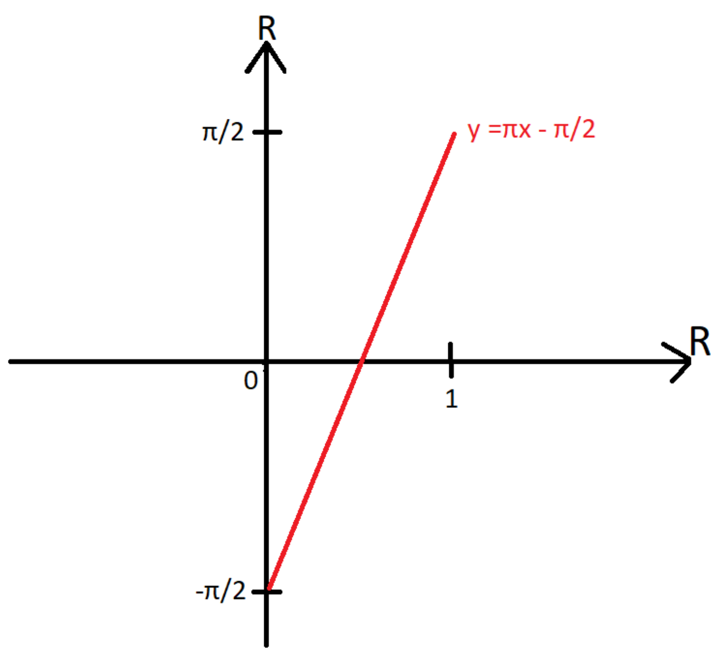

Figure 1 – Bijection entre $[0,1]$ et $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Déterminons l'expression de la bijection affine représentée ci-dessus. Une fonction affine est de la forme $f(x) := ax + b$ avec a et b deux paramètres réels à déterminer et ici x dans [0,1]. Pour connaître l'expression d'une fonction affine, il suffit de connaître deux points de son graphe. Ici, notre bijection est déterminée par les points $(0, -\frac{\pi}{2})$ et $(1, \frac{\pi}{2})$. La pente de la fonction affine est donc

$$a = \frac{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{0-1} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$$

Ensuite, comme $(0, -\frac{\pi}{2})$ appartient au graphe de la fonction, on a l'équation :

$$\pi.0 + b = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{\pi}{2}$$

La bijection représentée est donc définie par

$$f := \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \pi x - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Comme $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ et $f(1) = \frac{\pi}{2}$, en excluant 0 et 1 de l'ensemble de départ, on obtient une bijection entre $]0,1[$ et $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$g := \begin{cases}]0,1[& \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \pi x - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pour résumer, on a mis $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ en bijection.

$$[0,1] \underset{?}{\xrightarrow{\sim}}]0,1[\underset{g}{\xrightarrow{\sim}}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\underset{tan}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{R}$$

Reste à trouver une bijection entre $[0,1]$ et $]0,1[$.

Etape 3 : bijection entre $[0,1]$ et $]0,1[$

L'identité $x \mapsto x$ pourrait presque convenir. Les seuls problèmes sont avec 0 et 1 envoyés en dehors de l'intervalle $]0,1[$. On peut partir de cette fonction et essayer de la modifier pour obtenir une fonction qui convient.
Comment envoyer 0 et 1 dans $]0,1[$ sans qu'ils occupent une place déjà prise par un autre réel ?

L'idée est d'utiliser *les paradoxes de l'infini*. On prend un ensemble strictement dénombrable inclu dans $]0,1[$ disons $D := \{\frac{1}{2^{n+1}} \mid n \in \mathbb{N}\}$. On envoie alors 0 et 1 sur les deux premiers éléments de D. Alors, on ne peut plus envoyer $\frac{1}{2^1}$ et $\frac{1}{2^2}$ sur eux-même via l'identité, sinon on perd le côté injectif de l'application. On les envoie alors sur les deux prochains éléments de D. Puis on envoie les troisième et quatrième éléments de D sur les cinquième et sixième. Le fait que D soit infini permet d'itérer ce processus indéfiniment et on arrive à envoyer bijectivement $[0,1]$ dans $]0,1[$. Procédons à une démonstration formelle.

Si $x \in D$ notons n_x l' unique entier tel que $x = \frac{1}{2^{n_x}}$.

Soit

$$h := \left\{ \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow &]0,1[\\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{2^{n_x+2}} & \text{si } x \in D \\ x & \text{si } x \notin D \cup \{0,1\} \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrons que h est une bijection de $[0,1]$ dans $]0,1[$.

3.1 Surjectivité

Soit $y \in]0,1[$.

Si $y = \frac{1}{2}$ (respectivement $y = \frac{1}{4}$), 0 (respectivement 1) est un antécédent de y par h.

Si $y \in D \setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$, $\frac{1}{2^{n_y-2}}$ est un antécédent de y par h. En effet,

$$h(\frac{1}{2^{n_y-2}}) = \frac{1}{2^{(n_y-2)+2}} = \frac{1}{2^{n_y}}$$

Si $y \notin D$, alors y est un antécédent de y par h.

h est surjective.

3.2 Injectivité

Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tels que $h(x) = h(y)$. Distinguons plusieurs cas selon la valeur de $h(x)$.

Si $h(x) = h(y) = \frac{1}{2}$:
Alors d'après la définition de h, le seul cas possible est $x = y = 0$.

De même si $h(x) = h(y) = \frac{1}{4}$, $x = y = 1$.

Si $h(x) = h(y) = \frac{1}{2^n}$ avec $n \geq 2$.
D'après la construction de h, la seule façon d'obtenir une telle valeur est d'avoir

$$x = y = \frac{1}{2^{n-2}}$$

Enfin, si $h(x) \notin D \cup \{0,1\}$,
Encore une fois d'après la construction de h, $h(x) = x = y = h(y)$.

h est injective.

h est bijective.

On peut compléter le schéma :

$$[0,1] \xrightarrow[h]{\sim}]0,1[\xrightarrow[g]{\sim}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow[tan]{\sim} \mathbb{R}$$

En faisant attention à l'ordre dans la composition,

$$\boxed{\tan \circ g \circ h \text{ est une bijection de } [0,1] \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Résumé de la preuve

1) Etape 1 : Mettre $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$ en bijection via la fonction tangente.

2) Etape 2 : Mettre $]0,1[$ et $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ en bijection via la fonction affine : $f := \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \pi x - \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

3) Etape 3 : Mettre $[0,1]$ et $]0,1[$ en bijection grâce à :

$$h := \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow &]0,1[\\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{2^{n_x+2}} & \text{si } x \in D \\ x & \text{si } x \notin D \cup \{0,1\} \end{cases} \end{array} \right.$$