

Énoncé

Montrer que $[0, 1]$ est en bijection avec \mathbb{R} .

Correction

1) Etape 1 : Mettre $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ et \mathbb{R} en bijection via la fonction tangente.

2) Etape 2 : Mettre $]0, 1[$ et $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ en bijection via la fonction affine : $f := \begin{cases}]0, 1[& \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto \pi x - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

3) Etape 3 : Mettre $[0, 1]$ et $]0, 1[$ en bijection grâce à :

$$h := \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow]0, 1[\\ x & \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{2^{n_x+2}} & \text{si } x \in D \\ x & \text{si } x \notin D \cup \{0, 1\} \end{cases} \end{cases}$$