Énoncé

Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction

Introduction

Commençons par rappeler ce que signifie qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On utilise essentiellement 2 définitions qui sont équivalentes quand on travaille dans $(\mathbb{R}, |.|)$:

$$1) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 x < y \Rightarrow A \cap]x,y[\neq \emptyset$$

Qui signifie qu'entre **deux réels distincts** il existe toujours **au moins un** élément de A.

$$2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

Qui signifie que **tout réel** est limite **d'au moins une** suite d'éléments de A.
Nous ne referons pas la démonstration de l'équivalence de ces définitions ici mais nous répondons à quelques questions que l'on peut se poser concernant la définition 1.
Pourquoi avoir pris un intervalle ouvert dans la définition ? Peut-on prendre un intervalle fermé ? semi-ouvert ? semi-fermé ?
Prendre un intervalle ouvert vient d'un contexte plus général où l'on définit la propriété de densité d'une partie A de $(\mathbb{R}, |.|)$ dans $\mathbb{R}$ ainsi :
Tout **ouvert non vide** O de $(\mathbb{R}, |.|)$ rencontre A (i.e $O \cap A \neq \emptyset$). Dans ce cadre précis, pour vérifier cette propriété, il **suffit** de la vérifier pour **les intervalles ouverts non vides**, qui sont des ouverts.

Ensuite, la propriété est équivalente peu importe le type d'intervalle non vide. Démontrons l'équivalence entre l'utilisation d'intervalles ouverts et fermés.

Intervalle ouvert implique intervalle fermé :
Supposons que $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$.
Comme A est dense dans $\mathbb{R}$,

$$A \cap]x,y[\neq \emptyset$$

De plus, $]x,y[\subset [x,y]$, nous en déduisons :

$$A \cap]x,y[\subset A \cap [x,y]$$

$A \cap [x,y]$ possède un sous-ensemble non vide donc $\boxed{A \cap [x,y] \neq \emptyset}$.
C'était le sens trivial.

Intervalle fermé implique intervalle ouvert :

Supposons que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 x \neq y \Rightarrow A \cap [x,y] \neq \emptyset$$

Montrons que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Idée de la preuve

L'idée de la preuve est simple. Trouver un intervalle fermé non vide inclus dans $]x,y[$ pour appliquer la propriété et pouvoir conclure. Il existe plein de façons de construire un tel intervalle. Déjà, on peut utiliser que le milieu de l'intervalle $\frac{x+y}{2} \in]x,y[$. Pour obtenir un autre point de $]x,y[$, on peut reprendre le milieu entre x et $\frac{x+y}{2}$ ou $\frac{x+y}{2}$ et y. Ceci nous permet d'avoir un sous-intervalle fermé de $]x,y[$.

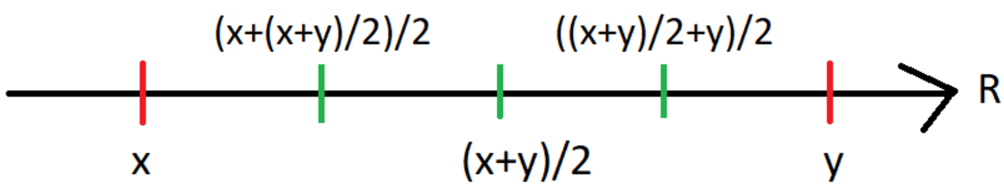

FIGURE 1 – Schéma de la preuve

Mise en oeuvre de l'idée

Nous appliquons exactement ce qui a été dit dans le paragraphe précédent.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$.

On a :

$$x < \frac{x + \frac{x+y}{2}}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{\frac{x+y}{2} + y}{2} < y$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3x+y}{4} < \frac{x+y}{2} < \frac{x+3y}{4} < y$$

D'après la propriété vérifiée par A, $A \cap [\frac{3x+y}{4}, \frac{x+3y}{4}] \neq \emptyset$ car $\frac{3x+y}{4} < \frac{x+3y}{4}$. Comme,

$$A \cap [\frac{3x+y}{4}, \frac{x+3y}{4}] \subset A \cap]x,y[\quad \text{et} \quad A \cap [\frac{3x+y}{4}, \frac{x+3y}{4}] \neq \emptyset$$

on en déduit que $A \cap]x,y[\neq \emptyset$. A est dense dans $\mathbb{R}$.
Cette preuve se recycle et permet de traiter les autres types d'intervalles.

Démonstrations de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Preuve par construction d'un rationnel dans un intervalle ouvert non vide

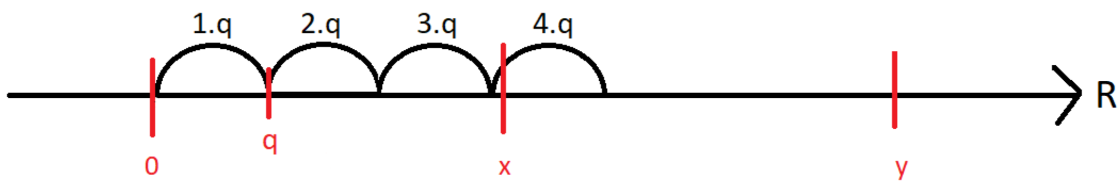

FIGURE 2 – Schéma de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Explication de la preuve

L'explication de la preuve est basée sur le schéma ci-dessus. On se donne $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$ et on cherche à construire $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$. La première idée est d'utiliser le fait que $\inf(\mathbb{Q}_+^*) = 0$. Autrement dit, on peut trouver un rationnel strictement positif aussi proche que l'on veut de 0. En particulier, on peut trouver un rationnel q tel $0 < q < y - x$ avec $y - x$ **la taille de l'intervalle** $]x, y[$. L'idée ensuite est qu'au moins un multiple de q (donc toujours un rationnel) est dans $]x, y[$. En effet, quand on additionne q à lui même, on se déplace vers la droite sur la droite des réels par petits sauts. Le principe d'Archimède ($(nq)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$) nous assure qu'on va trouver un entier n vérifiant $nq \leq x < (n+1)q$. Enfin, comme le saut entre nq et $(n+1)q$ est petit (inférieur à la taille de l'intervalle $]x, y[$), on est sûr que $(n+1)q < y$, $(n+1)q$ n'a pas pu dépasser y et atterir en dehors de l'intervalle. $(n+1)q$ est le rationnel qui convient.

Mise en forme de la preuve

Les calculs qui suivent sont l'exact mise en forme du paragraphe ci-dessus.

1ère étape : Trouver un rationnel positif petit

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$.
On a $y - x > 0$.

On cherche un rationnel dans l'intervalle $]0, y-x[$. Ce rationnel dépend de x et y donc on peut le chercher en lien avec la quantité $y-x$.

1er essai :

Si on avait $y-x \in \mathbb{Q}$, alors $\frac{y-x}{2}$ conviendrait.
Malheureusement, en général $y-x \notin \mathbb{Q}$. On ne peut pas considérer $y-x$ directement.

2eme essai :

On est gêné par le fait que $y-x \notin \mathbb{Q}$ en général. Peut-être pouvons nous contourner cette difficulté grâce à $\lfloor y-x \rfloor \in \mathbb{N}$. Si on avait $y-x \geq 1$, par croissance de la partie entière, on aurait

$$\lfloor y-x \rfloor \geq \lfloor 1 \rfloor \Leftrightarrow \lfloor y-x \rfloor \geq 1 \Rightarrow \lfloor y-x \rfloor > 0$$

Et alors

$$0 < \frac{\lfloor y-x \rfloor}{2} < \lfloor y-x \rfloor \leq y-x$$

Donc $\frac{\lfloor y-x \rfloor}{2}$ conviendrait.
Malheureusement, on n'est pas assuré que $y-x \geq 1$, notamment si x et y sont très proches. On peut donc avoir $\lfloor y-x \rfloor = 0$ ce qui empêche d'appliquer la construction ci-dessus.

3ème essai :

On n'a pas encore regardé la quantité (bien définie) $\frac{1}{y-x}$. On ne sait pas si elle est rationnelle, mais on sait que

$$\frac{1}{\frac{1}{y-x}} = y-x$$

Un rationnel positif proche de $\frac{1}{y-x}$ est $\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor$. Donc sous-réserve d'existence,

$$\frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor} \quad \text{est un rationnel proche de} \quad \frac{1}{\frac{1}{y-x}} = y-x.$$

On examine en détails $\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ pour confirmer notre intuition et finir la première étape de la preuve. Par propriété de la partie entière,

$$\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor \leq \frac{1}{y-x} < \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$$

On sait que $y-x > 0$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$y-x > \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1} > 0$$

$\frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1} \in \mathbb{Q}_+^*$ convient.

2ème étape : on le déplace dans l'intervalle

Considérons la suite des multiples de $\frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1}$: $\left(n \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$.

On a :

$$n\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$$

et

$$n\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}\underset{n\to-\infty}{\to}-\infty$$

On est sûr d'être plus loin de zéro que x à partir d'un certain rang, i.e $|n\frac{1}{\lfloor\frac{1}{y-x}\rfloor+1}|>|x|$. Déterminons le multiple de $\frac{1}{\lfloor\frac{1}{y-x}\rfloor+1}$ le plus proche de x et inférieur à x. Un tel entier $k\in\mathbb{Z}$ vérifie :

$$k\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}\leq x<(k+1)\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}$$

En multipliant ces inégalités par $\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1>0$:

$$\Leftrightarrow k\leq x\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1<(k+1)$$

Par définition de la partie entière,

$$\Leftrightarrow k=\left\lfloor x\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1\right\rfloor\in\mathbb{Z}$$

On a alors d'après ce qui précède,

$$x<(k+1)\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}=k\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}+\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}$$

On a démontré précédemment par construction,

$$k\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}\leq x\quad\text{et}\quad\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}<y-x\quad\text{(vient de l'étape 1)}$$

Donc

$$x<(k+1)\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}<x+(y-x)$$

$$\Leftrightarrow\boxed{x<(k+1)\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}<y}$$

Donc

$$(k+1)\frac{1}{\left\lfloor\frac{1}{y-x}\right\rfloor+1}\in\mathbb{Q}\cap]x,y[$$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque :
Si l'on réfléchit bien, les arguments de cette preuve montrent que tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\inf(A \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$ et stable par $+$ et $-$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ici on a voulu exhiber un rationnel proche de 0 mais ce n'est pas nécessaire, l'existence étant déjà donnée par $\inf(\mathbb{Q}_+^*) = 0$. Nous en déduisons que les nombres dyadiques et les nombres décimaux sont denses dans $\mathbb{R}$ (nous les redéfinissons plus tard dans la section **Sous-ensembles de rationnels denses dans** $\mathbb{R}$).

Preuve utilisant la caractérisation séquentielle

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On doit construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x.

idée de la preuve

Voici l'idée, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$,
On a

$$\frac{\lfloor u_n x \rfloor}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} x.$$

En prenant une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, la nouvelle suite construite $(\frac{\lfloor u_n x \rfloor}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite de rationnels qui converge vers x.

La preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$. Démontrons la propriété énoncée dans **idée de la preuve**.
On dispose du développement asymptotique suivant (voir **Remarque**) :

$$u_n x \underset{n\to+\infty}{=} \lfloor u_n x \rfloor + O(1)$$

$$\Leftrightarrow \lfloor u_n x \rfloor \underset{n\to+\infty}{=} u_n x + O(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lfloor u_n x \rfloor}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} x + O(\frac{1}{u_n})$$

Comme $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$,

$$\boxed{\frac{\lfloor u_n x \rfloor}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} x}$$

Remarque :
Le développement asymptotique est issu de l'inégalité définissant la partie entière d'un réel y :

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

$$\boxed{\Leftrightarrow 0 \leq y - \lfloor y \rfloor < 1}$$

Donc

$$y - \lfloor y \rfloor \underset{y \to +\infty}{=} O(1), \text{ c'est à dire } y - \lfloor y \rfloor \text{ est borné au voisinage de } +\infty.$$

Pour conclure, il suffit de trouver une suite de rationnels qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Par exemple $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$, qui plus est ne s'annule pas, donc $\frac{\lfloor (n+1)x \rfloor}{n+1}$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Sous-ensembles de rationnels denses dans $\mathbb{R}$:

Cette dernière démonstration permet de montrer que **l'ensemble des nombres décimaux** et **l'ensemble des nombres dyadiques** sont denses dans $\mathbb{R}$.

Les dyadiques sont les éléments de l'ensemble :

$$\{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$$

Les décimaux sont les éléments de l'ensemble :

$$\mathbb{D} := \{\frac{m}{10^n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$$

En prenant pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n := 2^n$ on a une suite de dyadiques $(\frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}\, \lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $2^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$). Pour avoir la densité des nombres décimaux, il suffit de prendre pour tout $n \in \mathbb{N}\ u_n := 10^n$ et on obtient la suite $(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

Approximation à gauche et à droite par des suites de rationnels $\mathbb{R}$:

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
D'après l'inégalité définissant la partie entière et la positivité de $n+1$,

$$x - \frac{1}{n+1} \leq \frac{\lfloor (n+1)x \rfloor}{n+1} \leq x$$

Ainsi, la suite $(\frac{\lfloor (n+1)x \rfloor}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours inférieure à x et converge vers x. Elle approxime x par **valeurs inférieures** (ou par la **gauche**).
Tandis que la suite $(\frac{\lfloor (n+1)x \rfloor + 1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ approxime x par **valeurs supérieures** (ou par la **droite**), d'après l'inégalité ci-dessous :

$$x \leq \frac{\lfloor (n+1)x \rfloor + 1}{n+1} \leq x + \frac{1}{n+1}$$

Résumé des preuves

preuve 1 : Construction de $q \in \mathbb{Q}$ dans $]x, y[$
1) Trouver un rationnel suffisamment proche de 0 : $y - x > \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1} > 0$
2) Au moins un multiple de ce rationnel est dans $]x, y[$: $\left\lfloor x \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1 \right\rfloor \times \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1} \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$.

preuve 2 : Par caractérisation séquentielle
1) Montrer par encadrement de la partie entière que :

$$\frac{\lfloor (n+1)x \rfloor}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

2)On montre au passage la densité dans $\mathbb{R}$ des dyadiques ou des décimaux :

$$\frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \quad \text{ou} \quad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$