Énoncé

Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction

preuve 1 : Construction de $q \in \mathbb{Q}$ dans $]x, y[$
1) Trouver un rationnel suffisamment proche de 0 : $y - x > \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1} > 0$
2) Au moins un multiple de ce rationnel est dans $]x, y[$: $\left\lfloor x \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1 \right\rfloor \times \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1} \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$.

preuve 2 : Par caractérisation séquentielle
1) Montrer par encadrement de la partie entière que :

$$\frac{\lfloor (n+1)x \rfloor}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

2)On montre au passage la densité dans $\mathbb{R}$ des dyadiques ou des décimaux :

$$\frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \quad \text{ou} \quad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$