Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Démontrer la formule :

$$\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k)$$

où

$\llbracket 1, n \rrbracket := \{m \in \mathbb{Z} \ , \ 1 \leq m \leq n\}$

$\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) := \{I \mid \text{I} \subset \llbracket 1, n \rrbracket\}$

Si $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $I^c := \{m \in \llbracket 1, n \rrbracket \ , \ m \notin I\}$

Correction

Bonne définition des termes mis en jeu

On peut se demander ici si les sommes et produits mis en jeu sont bien définis car les indexations sont sur des ensembles qu'on a moins l'habitude de manipuler.
$\llbracket 1, n \rrbracket$ est fini et son cardinal (le nombre d'éléments qu'il contient) vaut n. Donc, $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est fini et l'on sait, d'après le cours de MPSI que son cardinal vaut 2^n. Si $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ alors I et I^c sont finis en tant que sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui est fini.
Ainsi, toutes les sommes et tous les produits sont indéxés par des **ensemble finis**. Ceci permet de donner un sens à chaque termes de l'égalité et conclure que les termes de l'égalité sont bien définis.

Résolution dans le cas où n est petit

Le terme à droite serait à priori la somme que l'on obtient lorsqu'on développe le produit $\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)$. Avant de s'attaquer à la démonstration de la formule générale, on peut se rassurer en vérifiant qu'elle est vraie pour n petit, c'est-à-dire $n \in \{1, 2\}$.

Pour $n = 1$:

Du côté gauche on a :

$$\prod_{k=1}^{1} (x_k + y_k) = x_1 + y_1$$

Du côté droit on a :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,1 \rrbracket)} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k)$$

Il n'y a que deux sous-ensembles de $[\![1,1]\!] = \{1\}$ qui sont $\emptyset$ et $\{1\}$ de cardinaux respectifs 0 et 1. De plus dans le contexte de la sous-section, $\emptyset^c = \{1\}$ et $\{1\}^c = \emptyset$. Ceci donne :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,1]\!])} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k) = \prod_{k \in \emptyset} (x_k) \prod_{k \in \{1\}} (y_k) + \prod_{k \in \{1\}} (x_k) \prod_{k \in \emptyset} (y_k) = 1.y_1 + x_1.1$$

Rappelons que **par convention**, un produit indexé par un ensemble vide vaut 1.

On a ainsi démontré :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{1} (x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,1]\!])} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \notin I} (y_k)}$$

Pour $n = 2$:

Du côté gauche en développant :

$$\prod_{k=1}^{2} (x_k + y_k) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2$$

Du côté droit :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,2]\!])} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k)$$

$[\![1,2]\!]$ contient $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{1,2\}$ de cardinaux respectifs 0 , 1 , 1 et 2. De plus dans le contexte de la sous-section, $\emptyset^c = \{1,2\}$ et $\{1\}^c = \{2\}$, $\{2\}^c = \{1\}$, $\{1,2\}^c = \emptyset$. Ceci donne :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,2]\!])} \prod_{k \in I} x_k \prod_{k \in I^c} y_k = \prod_{k \in \emptyset} x_k \prod_{k \in \{1,2\}} y_k + \prod_{k \in \{1\}} x_k \prod_{k \in \{2\}} y_k + \prod_{k \in \{2\}} x_k \prod_{k \in \{1\}} y_k + \prod_{k \in \{1,2\}} x_k \prod_{k \in \emptyset} y_k$$

$$\sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,2]\!])} \prod_{k \in I} x_k \prod_{k \in I^c} y_k = 1.y_1 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 x_2.1$$

Donc,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{2} (x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,2]\!])} \prod_{k \in I} x_k \prod_{k \in I^c} y_k}$$

Pour les premières valeurs de n, la formule est vraie.

Démonstration informelle par dénombrement

On considère la quantité $\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)$.

Elle se réécrit, de manière informelle :

$$\prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k)=(x_1+y_1)\times(x_2+y_2)\times\ldots\times(x_n+y_n)$$

Comment obtient-on un terme du produit sous forme développée ?

Dans chaque parenthèse il faut **choisir un terme et multiplier entre eux les termes choisis**.

Par exemple,

Dans la première parenthèse on **choisit** x_1.

Dans la deuxième parenthèse on **choisit** y_2.

$$\ldots$$

Dans la dernière parenthèse on **choisit** y_n.

Ce processus de n **étapes** multiplicatives (chaque étape correspond au choix d'un facteur dans un produit), permet d'obtenir un terme du produit écrit sous forme développée :

$$x_1\times y_2\times\ldots\times y_n$$

Le développement final ressemble ainsi à :

$$(x_1+y_1)\times(x_2+y_2)\times\ldots\times(x_n+y_n)=x_1x_2\times\cdots\times x_{n-1}x_n+y_1x_2\times\cdots\times x_{n-1}x_n+\cdots+y_1y_2\times\cdots\times y_{n-1}y_n$$

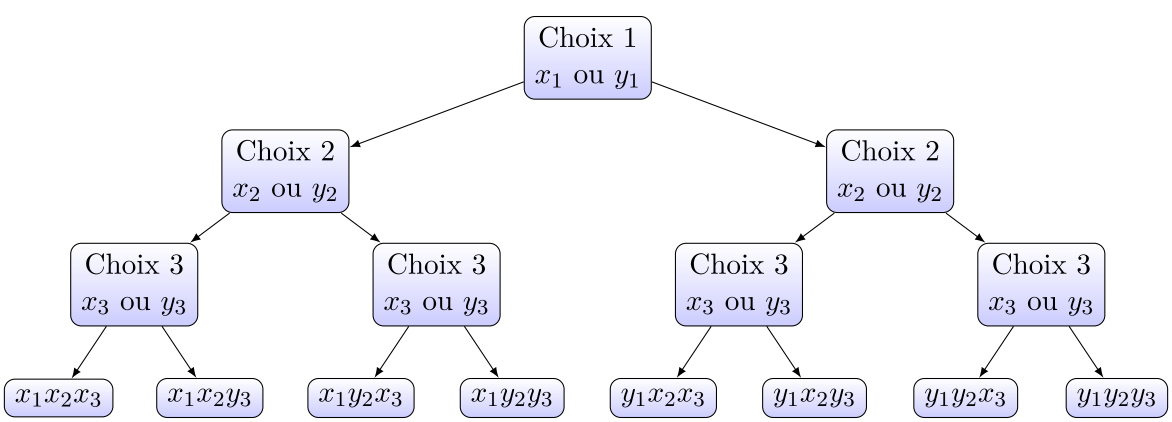
Combien de produits avons-nous ?

En fait, on a n étapes multiplicatives et à chaque étape $k\in[\![1,n]\!]$ du processus, on a 2 **possibilités** :

le produit contient x_k ou le produit contient y_k.

Les choix à chaque étapes étant **indépendants**, d'après **le principe multiplicatif**, on obtient 2^n **produits de n termes**.

Voici une illustration de l'obtention de tous les facteurs dans le cas $n=3$:



On retrouve bien $2^3 = 8$ produits de 3 termes différents.

Comment écrire tous ces produits sous un symbole $\sum$?
Le fait qu'il y ait 2^n produits n'est pas anodin. C'est le cardinal de l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$. Il existe donc **au moins** un moyen d'associer une unique partie de $[\![1,n]\!]$ à chaque produit obtenus en développant. Analysons notre construction pour exhiber cette bijection.

Pour chaque terme du développement, on a effectué un choix à chaque étape $k \in [\![1,n]\!]$, consistant à prendre soit x_k, soit y_k. Ce choix peut être modélisé par un sous-ensemble $I \subset [\![1,n]\!]$, où :

— $k \in I$ signifie que l'on a choisi x_k,

— $k \notin I$ signifie que l'on a choisi y_k.

Ainsi, chaque terme du développement est de la forme :

$$\prod_{k\in I} x_k \prod_{k\in I^c} y_k$$

pour un certain sous-ensemble $I \subset [\![1,n]\!]$.
On a ainsi trouvé une bijection naturelle entre les éléments de $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$ et les 2^n produits apparaissants dans le développement de $\prod_{k=1}^n (x_k + y_k)$:

$$I \mapsto \prod_{k\in I} x_k \prod_{k\in I^c} y_k$$

Pour obtenir **tous** les termes du développement, il suffit donc de sommer sur l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ et l'on obtient l'expression :

$$\boxed{\prod_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} \prod_{k\in I} x_k \prod_{k\in I^c} y_k}$$

$\square$

Démonstration formelle par récurrence

Pour démontrer rigoureusement la formule

$$\prod_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} \prod_{k\in I} (x_k) \prod_{k\in I^c} (y_k)$$

on peut penser à effectuer un raisonnement par récurrence.
En effet,

-le produit est indexé de 1 à n avec n un entier naturel,

-le lien entre la formule aux rangs $n+1$ et n est facilement effectué :

$$\prod_{k=1}^{n+1} (x_k + y_k) = (x_{n+1} + y_{n+1}) \times \prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)$$

-les cas $n = 1$ ou $n = 2$ ont été vérifiés sans difficulté.
Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par :

$$\mathcal{P}(n) = \text{« } \forall((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \prod_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k) \text{ »}$$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
L'initialisation (le cas $n = 1$) a déjà été verifiée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k) = (x_{n+1} + y_{n+1}) \times \prod_{k=1}^{n}(x_k + y_k)$$

D'après $\mathcal{P}(n)$,

$$\prod_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k)$$

Donc

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k) = (x_{n+1} + y_{n+1}) \times \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k)$$

On distribue la somme sur x_{n+1} et y_{n+1} et on utilise la linéarité de la somme :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} x_{n+1} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k) \quad + \quad \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} y_{n+1} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k)$$

Pour tout $I \in \mathcal{P}, (\llbracket 1, n \rrbracket) \quad x_{n+1} \prod_{k \in I}(x_k) = \prod_{k \in I \cup \{n+1\}}(x_k)$ et par commutativité de $\times$:

$$y_{n+1} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k) = \prod_{k \in I}(x_k) y_{n+1} \prod_{k \in I^c}(y_k) = \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c \cup \{n+1\}}(y_k)$$

Donc

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I \cup \{n+1\}}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k) \quad + \quad \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c \cup \{n+1\}}(y_k)$$

A présent, il suffit de prouver que le terme de droite est

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket)} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k).$$

On doit le mettre en évidence en transformant l'écriture des sommes.

Examinons la 1ère somme du développement de $\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k)$.

Soit $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
Comme $I^c \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $I^c \cap \{n+1\} = \emptyset$.
Donc $I^c \subset \{n+1\}^c$.
D'après les lois de De Morgan,

$$I^c = I^c \cap \{n+1\}^c = (I \cup \{n+1\})^c$$

La première somme se réécrit :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I \cup \{n+1\}} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I \cup \{n+1\}} (x_k) \prod_{k \in (I \cup \{n+1\})^c} (y_k)$$

On effectue **le changement de variable** $J = I \cup \{n+1\}$ (bijection entre les parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$) qui contiennent $n+1$) :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I \cup \{n+1\}} (x_k) \prod_{k \in (I \cup \{n+1\})^c} (y_k) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket) \\ n+1 \in J}} \prod_{k \in J} x_k \prod_{k \in J^c} y_k$$

Examinons la 2ème somme.
Soit $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
De la même façon que pour la 1ère somme, on a $I \subset \{n+1\}^c$.
Donc

$$I = I \cap \{n+1\}^c = I \setminus \{n+1\}$$

De plus d'après les lois de De Morgan,

$$I^c \cup \{n+1\} = ((I^c \cup \{n+1\})^c)^c = (I \cap \{n+1\})^c = I \setminus \{n+1\}$$

La deuxième somme se réécrit :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c \cup \{n+1\}} (y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I \setminus \{n+1\}} (x_k) \prod_{k \in (I \setminus \{n+1\})^c} (y_k)$$

Effectuons **le changement de variable** $J = I \setminus \{n+1\}$ (bijection entre les parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$) et les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$) qui ne contiennent pas $n+1$) :

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{kI \in \setminus \{n+1\}} (x_k) \prod_{k \in (I \setminus \{n+1\})^c} (y_k) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket) \\ n+1 \notin J}} \prod_{k \in J} (x_k) \prod_{k \in J^c} (y_k)$$

Donc on obtient l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket) \\ n+1 \in J}} \prod_{k \in J} x_k \prod_{k \in J^c} y_k \quad + \quad \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket) \\ n+1 \notin J}} \prod_{k \in J} (x_k) \prod_{k \in J^c} (y_k)$$

Dans la première somme on a toutes les parties de $[\![1, n+1]\!]$ qui contiennent $n+1$ et dans la deuxième toutes les parties de $[\![1, n+1]\!]$ qui ne contiennet pas $n+1$. On a donc toutes les parties de $[\![1, n+1]\!]$. On peut conclure que :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n+1}(x_k+y_k) = \sum_{J\in\mathcal{P}([\![1,n+1]\!])} \prod_{k\in J} x_k \prod_{k\in J^c} y_k}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce même rang, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$\square$

Remarque finale
Les éléments que l'on a manipulé (les $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$) sont des réels mais l'on a seulement utilisé (implicitement) les propriétés **d'anneau commutatif** de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Ainsi, l'égalité reste vraie dans n'importe quel anneau commutatif $(A, +, \times)$ comme $(\mathbb{C}, +, \times)$ ou l'anneau des polynômes $(A[X], +, \times)$ à coefficients dans un anneau commutatif $(A, +, \times)$.

Résumé des preuves

Preuve 1 : Dénombrement
1) Réécrire $\prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k) = (x_1+y_1)\times(x_2+y_2)\times ... \times(x_n+y_n)$
2) Compter le nombre d'élements quand on développe : 2^n produits de n termes.
3) On cherche un lien avec $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$ qui est de cardinal 2^n
3) On se rend compte que construire un des 2^n produits revient au choix d'une partie I de $[\![1,n]\!]$ par cette bijection :

$$I \mapsto \prod_{k\in I} x_k \prod_{k\in I^c} y_k$$

4) On somme la quantité $\prod_{k\in I} x_k \prod_{k\in I^c} y_k$ sur l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ pour obtenir les 2^n produits du développement de $(x_1+y_1)\times(x_2+y_2)\times ... \times(x_n+y_n)$:

$$\boxed{(x_1+y_1)\times(x_2+y_2)\times ... \times(x_n+y_n) \quad = \sum_{I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} \prod_{k\in I}(x_k) \prod_{k\in I^c}(y_k)}$$

Preuve 2 : Récurrence
1) On pose la propriété :

$$\mathcal{P}(n) = \text{«}\ \forall((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k) = \sum_{I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} \prod_{k\in I}(x_k) \prod_{k\in I^c}(y_k)\ \text{»}$$

2) On initialise la récurrence à $n=1$ en vérifiant :

$$\prod_{k=1}^{1}(x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,1 \rrbracket)} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k)$$

3) On prouve l'hérédité de la propriété. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.
4) On part de :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k) = (x_{n+1} + y_{n+1}) \times \prod_{k=1}^{n}(x_k + y_k)$$

5) On utilise $\mathcal{P}(n)$, on distribue et on réécrit l'indexation des produits pour arriver à :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I \cup \{n+1\}} (x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k) \quad + \quad \sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c \cup \{n+1\}} (y_k)$$

6) Dans la somme de gauche on fait le changement de variable $J = I \cup \{n+1\}$ pour montrer qu'on a toutes les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ qui contiennent $n+1$.
7) Dans la somme de droite on fait le changement de variable $J = I \setminus \{n+1\}$ pour montrer qu'on a toutes les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ qui ne contiennent pas $n+1$.
8) On a donc sommé sur toutes les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la quantité $\prod_{k \in I}(x_k) \prod_{k \in I^c}(y_k)$ ce qui donne

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k + y_k) = \sum_{J \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket)} \prod_{k \in J} x_k \prod_{k \in J^c} y_k$$

9) L'hérédité est prouvée ce qui termine la preuve grâce au principe de récurrence.