Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Démontrer la formule :

$$\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k)$$

où

$[\![1, n]\!] := \{m \in \mathbb{Z}\ ,\ 1 \leq m \leq n\}$

$\mathcal{P}([\![1, n]\!]) := \{I \mid \text{I} \subset [\![1, n]\!]\}$

Si $I \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])$, $I^c := \{m \in [\![1, n]\!]\ ,\ m \notin I\}$

Correction

Preuve 1 : Dénombrement

1) Rééecrire $\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = (x_1 + y_1) \times (x_2 + y_2) \times ... \times (x_n + y_n)$

2) Compter le nombre d'élements quand on développe : 2^n produits de n termes.

3) On cherche un lien avec $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ qui est de cardinal 2^n

3) On se rend compte que construire un des 2^n produits revient au choix d'une partie I de $[\![1, n]\!]$ par cette bijection :

$$I \mapsto \prod_{k \in I} x_k \prod_{k \in I^c} y_k$$

4) On somme la quantité $\prod_{k \in I} x_k \prod_{k \in I^c} y_k$ sur l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ pour obtenir les 2^n produits du développement de $(x_1 + y_1) \times (x_2 + y_2) \times ... \times (x_n + y_n)$:

$$\boxed{(x_1 + y_1) \times (x_2 + y_2) \times ... \times (x_n + y_n) \quad = \sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k)}$$

Preuve 2 : Récurrence

1) On pose la propriété :

$$\mathcal{P}(n) = \text{« } \forall ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k) \text{ »}$$

2) On initialise la récurrence à $n = 1$ en vérifiant :

$$\prod_{k=1}^{1} (x_k + y_k) = \sum_{I \in \mathcal{P}([\![1,1]\!])} \prod_{k \in I} (x_k) \prod_{k \in I^c} (y_k)$$

3) On prouve l'hérédité de la propriété. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.
4) On part de :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k+y_k)=(x_{n+1}+y_{n+1})\times\prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k)$$

5) On utilise $\mathcal{P}(n)$, on distribue et on réécrit l'indexation des produits pour arriver à :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k+y_k)=\sum_{I\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)}\prod_{k\in I\cup\{n+1\}}(x_k)\prod_{k\in I^c}(y_k)\quad+\quad\sum_{I\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)}\prod_{k\in I}(x_k)\prod_{k\in I^c\cup\{n+1\}}(y_k)$$

6) Dans la somme de gauche on fait le changement de variable $J=I\cup\{n+1\}$ pour montrer qu'on a toutes les parties de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$ qui contiennent $n+1$.
7) Dans la somme de droite on fait le changement de variable $J=I\setminus\{n+1\}$ pour montrer qu'on a toutes les parties de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$ qui ne contiennent pas $n+1$.
8) On a donc sommé sur toutes les parties de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$ la quantité $\prod_{k\in I}(x_k)\prod_{k\in I^c}(y_k)$ ce qui donne

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x_k+y_k)=\sum_{J\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)}\prod_{k\in J}x_k\prod_{k\in J^c}y_k$$

9) L'hérédité est prouvée ce qui termine la preuve grâce au principe de récurrence.