



PROJET D'ÉCONOMIE FINANCIÈRE

# Dominance stochastique et choix de portefeuille

Analyse empirique de portefeuilles d'actions face à l'indice CAC 40

**Auteur :**

Paul-Emmanuel Meyrignac

**Encadrant :**

François Maublanc (Microéconomie de l'incertain, CY Tech)

**Domaines :**

Économie financière — Analyse de données financières

**Résumé**

Ce projet étudie empiriquement si des portefeuilles d'actions peuvent dominer stochastiquement un ETF répliquant le CAC 40. À partir de données de prix journaliers (2015–2025) extraites via `yfinance` (Python), 100 portefeuilles aléatoires sont construits. Les rendements journaliers sont analysés puis soumis à des tests de dominance stochastique d'ordre 1 et 2 à l'aide de la bibliothèque `PySDTest`. L'étude examine ensuite la stabilité temporelle de la dominance ainsi que la performance financière à l'année  $t + 1$  des portefeuilles dominants à l'année  $t$  (Sharpe, VaR, skewness et kurtosis).

janvier 2026

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Données et construction des portefeuilles</b>	<b>2</b>
2.1	Données . . . . .	2
2.2	Construction des portefeuilles . . . . .	2
2.3	Analyse descriptive des rendements . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Choix de portefeuille et dominance stochastique</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Méthodologie empirique</b>	<b>4</b>
4.1	Mise en œuvre des tests de dominance stochastique . . . . .	4
4.2	Règle de décision et matrices de dominance . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Résultats</b>	<b>5</b>
5.1	Dominance stochastique . . . . .	5
5.2	Analyse graphique risque-rendement . . . . .	5
5.3	Stabilité temporelle de la dominance . . . . .	6
5.4	Performance financière ex post . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Discussion et limites</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>8</b>
<b>A</b>	<b>Illustrations des fonctions de répartition empiriques</b>	<b>9</b>

# 1 Introduction

Le CAC 40 est l'indice de référence du marché actions français. Il constitue un benchmark couramment utilisé pour évaluer la performance des portefeuilles investis sur ce marché. Il peut être répliqué par des fonds indiciels cotés (ETF), qui offrent une exposition passive à l'ensemble des entreprises composant l'indice.

Ce projet compare des portefeuilles d'actions construits à partir des titres du CAC 40 à l'indice CAC 40 lui-même sur la période 2015–2025. L'objectif est d'évaluer, à partir de données historiques, si certains portefeuilles peuvent être considérés comme préférables à un investissement indiciel passif selon le critère de dominance stochastique.

## 2 Données et construction des portefeuilles

### 2.1 Données

L'analyse repose sur les cours de clôture journaliers des actions composant l'indice CAC 40 ainsi que sur la valeur de l'indice CAC 40 lui-même. La période étudiée s'étend de janvier 2015 à décembre 2025. Les données sont extraites à l'aide de la bibliothèque Python `yfinance` et sont exprimées en euros.

À partir des prix de clôture  $P_{i,t}$  de l'actif  $i$  à la date  $t$ , les rendements journaliers sont calculés comme les variations en pourcentage d'un jour à l'autre, selon la formule

$$r_{i,t} := \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}.$$

Les dividendes ne sont pas pris en compte. Les observations manquantes sont éliminées afin d'assurer la comparabilité des séries de rendements.

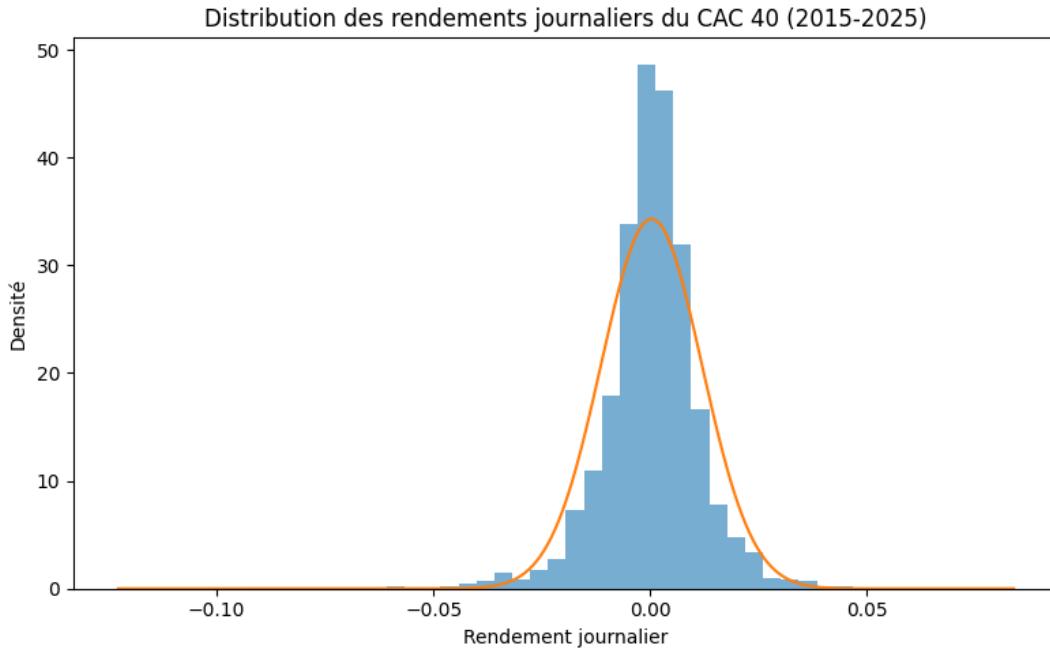
### 2.2 Construction des portefeuilles

À partir des actions du CAC 40, nous générerons un ensemble de 100 portefeuilles composés d'au moins deux titres. Les pondérations associées à chaque actif sont positives et normalisées, ce qui correspond à une stratégie statique de type *buy-and-hold*, sans vente à découvert ni effet de levier.

Les portefeuilles sont générés de manière aléatoire afin d'obtenir un échantillon diversifié de combinaisons possibles. Ces portefeuilles, ainsi que les actions individuelles, constituent l'ensemble des actifs comparés à l'indice dans la suite de l'analyse.

### 2.3 Analyse descriptive des rendements

Nous présentons dans cette sous-section une analyse descriptive des rendements journaliers de l'indice CAC 40 sur la période 2015–2025.



L'histogramme met en évidence une concentration des rendements autour de zéro plus marquée que celle prédictive par une loi normale ajustée par la moyenne et la variance empiriques. Autrement dit, la probabilité d'observer des rendements de faible amplitude est plus élevée dans les données que sous l'hypothèse de normalité, ce qui suggère une distribution plus pointue au centre.

Cette observation illustre les limites de l'approximation normale, même lorsque la moyenne et la variance sont correctement reproduites, et motive l'utilisation de critères de comparaison fondés sur la distribution complète des rendements.

### 3 Choix de portefeuille et dominance stochastique

La théorie classique de l'optimisation de portefeuille, introduite par Markowitz, repose sur une comparaison des portefeuilles à partir de leur espérance de rendement et de leur variance. Dans ce cadre moyenne-variance, un portefeuille est jugé préférable s'il offre un rendement espéré plus élevé pour un niveau de risque donné, ou un risque plus faible pour un rendement espéré donné. Cette approche est cohérente lorsque les rendements sont normalement distribués ou lorsque les préférences des investisseurs peuvent être représentées par une fonction d'utilité quadratique.

Dans la pratique, l'application du critère moyenne-variance suppose que l'essentiel de l'information pertinente pour le choix de portefeuille est contenu dans les deux premiers moments de la distribution des rendements. Toutefois, les rendements financiers observés empiriquement peuvent s'écartez de la normalité, notamment par une concentration plus marquée autour de la moyenne et la présence de queues plus épaisses, ce qui suggère que l'information pertinente pour la comparaison des portefeuilles peut dépasser la seule moyenne et la variance.

La dominance stochastique constitue une approche alternative, plus générale, qui permet de comparer deux actifs ou portefeuilles à partir de leurs distributions de rendements complètes, sans supposer de forme paramétrique particulière. Elle repose sur une relation d'ordre définie directement sur les fonctions de répartition des rendements.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires représentant les rendements de deux portefeuilles, définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . La probabilité  $\mathbb{P}$  correspond ici à la loi empirique induite par les rendements observés sur la période considérée.

On dit que  $X$  domine stochastiquement  $Y$  à l'ordre 1 si, pour tout ,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(Y \leq x) \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(X \geq x) \geq \mathbb{P}(Y \geq x)$$

avec une inégalité stricte pour au moins une valeur de  $x$ . Cette condition signifie que, pour tout seuil de rendement, la probabilité d'obtenir un rendement supérieur à ce seuil est plus grande pour  $X$  que pour  $Y$ .

La dominance stochastique d'ordre 2 est définie par la condition suivante : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\infty}^x \mathbb{P}(X \leq t) dt \leq \int_{-\infty}^x \mathbb{P}(Y \leq t) dt,$$

avec une inégalité stricte pour au moins une valeur de  $x$ . Ce critère correspond aux préférences d'investisseurs dont la fonction d'utilité est croissante et concave, c'est-à-dire averses au risque.

Il est important de noter que la dominance stochastique d'ordre 1 implique la dominance d'ordre 2, mais que l'inverse n'est pas vrai. Si la dominance stochastique fournit un cadre de comparaison plus général que l'approche moyenne-variance, elle constitue également un critère plus exigeant, dont la vérification empirique peut s'avérer délicate sur des données financières réelles.

## 4 Méthodologie empirique

### 4.1 Mise en œuvre des tests de dominance stochastique

La dominance stochastique entre les portefeuilles et l'indice CAC 40 est testée à l'aide de tests non paramétriques implémentés dans la bibliothèque Python `PySDTest`. Ces tests reposent sur la comparaison des fonctions de répartition empiriques des rendements et permettent d'évaluer la dominance stochastique d'ordre 1 et d'ordre 2.

L'analyse est conduite année par année sur la période 2015–2025. Pour chaque année  $t$ , les rendements journaliers de chaque portefeuille  $P_i$  sont comparés à ceux de l'indice CAC 40, ce qui permet d'étudier la stabilité temporelle des relations de dominance.

Pour chaque comparaison et chaque ordre de dominance  $s \in \{1, 2\}$ , deux hypothèses nulles complémentaires sont testées : le portefeuille domine stochastiquement l'indice (test A), et l'indice CAC 40 domine stochastiquement le portefeuille (test B). Les p-values associées sont obtenues par une procédure de rééchantillonnage bootstrap, sans recourir à des hypothèses paramétriques sur la loi des rendements.

Le niveau de significativité est fixé à  $\alpha = 5\%$ . Une hypothèse nulle est rejetée lorsque la p-value associée est inférieure à ce seuil.

### 4.2 Règle de décision et matrices de dominance

Pour chaque portefeuille  $P_i$ , chaque année  $t$  et chaque ordre de dominance  $s$ , les résultats des tests A et B sont combinés afin de caractériser la relation de dominance. Nous construisons une matrice de dominance  $A^{(s)} = (a_{i,t}^{(s)})$  définie par :

- $a_{i,t}^{(s)} = 1$  si l'hypothèse nulle du test A n'est pas rejetée et que celle du test B est rejetée : le portefeuille domine l'indice ;
- $a_{i,t}^{(s)} = 2$  si l'hypothèse nulle du test A est rejetée et que celle du test B n'est pas rejetée : l'indice domine le portefeuille ;
- $a_{i,t}^{(s)} = 0$  dans tous les autres cas, correspondant à une absence de dominance statistiquement établie ou à une situation ambiguë.

Cette règle de décision reconnaît explicitement que le non-rejet d'une hypothèse nulle ne constitue pas une validation formelle de celle-ci. Elle fournit néanmoins une classification opérationnelle des relations de dominance, adaptée à une analyse comparative sur un grand nombre de portefeuilles et sur plusieurs périodes.

## 5 Résultats

### 5.1 Dominance stochastique

Le tableau 1 présente la distribution des relations de dominance stochastique observées entre les portefeuilles étudiés et l'indice CAC 40 sur l'ensemble de la période 2015–2025, pour les ordres 1 et 2.

Distribution des relations de dominance stochastique

Ordre de dominance	Portefeuille domine	Indice domine	Aucune dominance
Ordre 1	68 (4,4 %)	61 (4,0 %)	1400 (91,6 %)
Ordre 2	7 (0,5 %)	212 (13,9 %)	1310 (85,7 %)

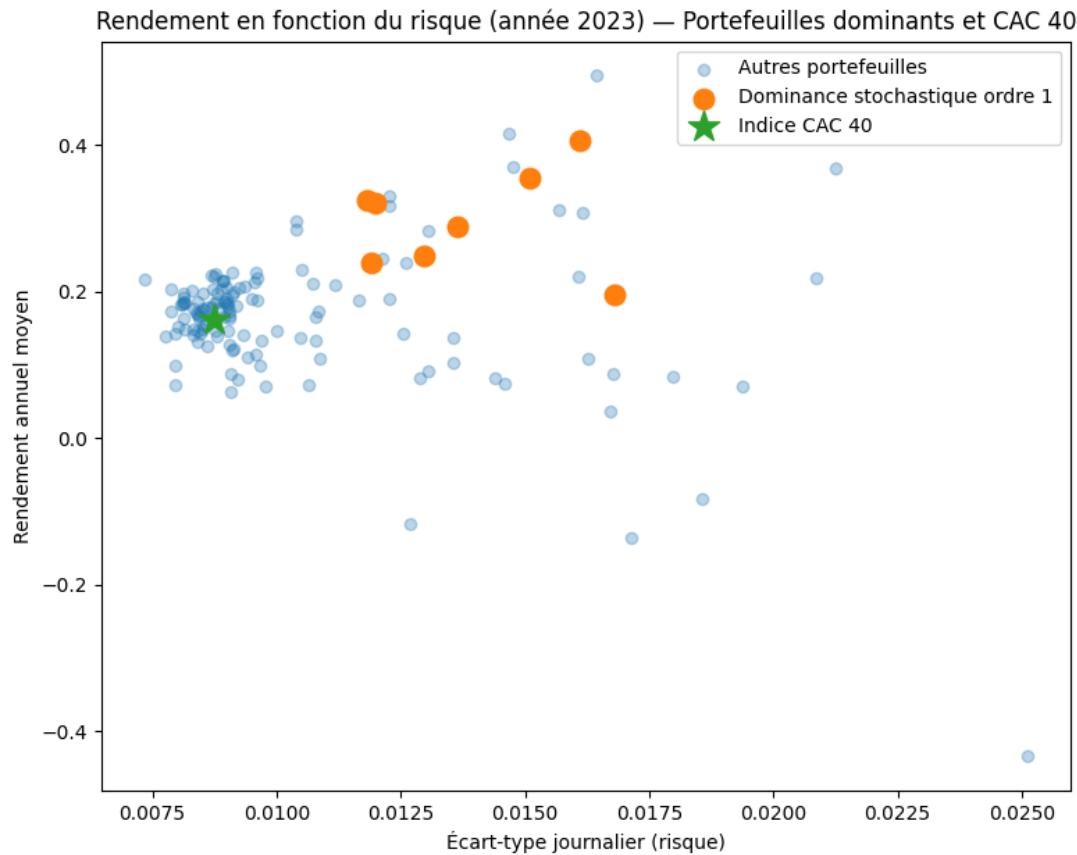
Les matrices de dominance construites pour les ordres 1 et 2 montrent que les relations de dominance stochastique entre les portefeuilles étudiés et l'indice CAC 40 sont rares sur la période considérée.

À l'ordre 1, seuls quelques portefeuilles dominent l'indice certaines années, tandis que la grande majorité des portefeuilles ne présente aucune relation de dominance statistiquement établie.

À l'ordre 2, la dominance stochastique des portefeuilles vis-à-vis de l'indice est extrêmement rare (presque 0 %). En revanche, l'indice CAC 40 domine un nombre non négligeable de portefeuilles selon ce critère, ce qui est cohérent avec l'interprétation de la dominance d'ordre 2 associée à des préférences averses au risque et au rôle stabilisateur de la diversification offerte par l'indice.

### 5.2 Analyse graphique risque–rendement

Afin d'illustrer les résultats obtenus, nous considérons le graphique risque–rendement pour l'année 2023. Chaque portefeuille est positionné en fonction de son rendement annuel moyen et de l'écart-type de ses rendements journaliers, et comparé à l'indice CAC 40.



Les tests de dominance montrent que seuls quelques portefeuilles dominent l’indice CAC 40 à l’ordre 1 en 2023, tandis qu’aucun portefeuille ne présente de dominance clairement établie à l’ordre 2 selon la règle de décision retenue. La majorité des portefeuilles n’entretiennent aucune relation de dominance statistiquement significative avec l’indice.

Sur le graphique, les portefeuilles dominants à l’ordre 1 se situent au-dessus du point représentant l’indice en termes de rendement annuel moyen, mais également plus à droite, ce qui traduit un niveau de volatilité plus élevé. L’indice CAC 40 apparaît ainsi comme un compromis rendement-risque, situé au centre du nuage de portefeuilles.

Bien que la dominance stochastique d’ordre 1 implique théoriquement la dominance d’ordre 2, les tests étant menés séparément à l’aide de procédures de bootstrap, des divergences peuvent apparaître en pratique. L’absence de dominance détectée à l’ordre 2 pour ces portefeuilles reflète ainsi le caractère exigeant du critère et la puissance statistique limitée des tests sur des échantillons annuels de rendements.

### 5.3 Stabilité temporelle de la dominance

L’analyse de la stabilité temporelle des relations de dominance montre que, si la majorité des portefeuilles ne domine l’indice que de manière ponctuelle, certains présentent des épisodes de dominance persistants sur plusieurs années consécutives.

À l’ordre 1, le portefeuille RMS.PA (Hermès International) est identifié comme dominant sur cinq années au total, avec une période continue de dominance s’étendant de 2017 à 2020, avant la disparition de cette relation. À l’ordre 2, le portefeuille STLAP.PA (Stellantis N.V.) domine l’indice sur cinq années également, avec une séquence ininterrompue de dominance entre 2015 et 2019, soit près de la moitié de la période étudiée.

Ces résultats mettent en évidence l’existence de phases de dominance stochastique relati-

vement durables, y compris selon le critère plus difficilement détectable de la dominance d'ordre 2. Néanmoins, aucune relation de dominance n'est permanente sur l'ensemble de la période 2015–2025. La dominance apparaît ainsi comme un phénomène dépendant des conditions de marché, susceptible de persister sur plusieurs années avant de disparaître lorsque la distribution des rendements évolue.

Ces épisodes de dominance persistante sont illustrés en annexe A par la comparaison des fonctions de répartition empiriques pour les portefeuilles Hermès International et Stellantis N.V., dominant respectivement à l'ordre 1 et 2, sur une année classée dominante et sur une année de non-dominance.

## 5.4 Performance financière ex post

Nous analysons ensuite la performance financière des portefeuilles dominants à l'année  $t$  sur l'année  $t + 1$ , en les comparant à celle de l'indice CAC 40. L'objectif est d'évaluer si la dominance stochastique observée sur les rendements passés se traduit par un avantage financier ex post. Les indicateurs retenus incluent le rendement moyen, le ratio de Sharpe et la Value at Risk à 95 %.

Pour chaque indicateur, le tableau ci-dessous reporte la moyenne des écarts portefeuille dominant – indice CAC 40, calculés en année  $t + 1$  pour l'ensemble des portefeuilles identifiés comme dominants en année  $t$ .

Performance financière moyenne en année  $t + 1$

Ordre de dominance	$\Delta$ rendement moyen	$\Delta$ Sharpe	$\Delta$ VaR 95%
Ordre 1	0,00031	0,01106	0,00788
Ordre 2	0,00064	0,02186	-0,00408

À l'ordre 1, les portefeuilles dominants affichent en moyenne un rendement journalier supérieur à celui de l'indice d'environ 0,00031, ainsi qu'un ratio de Sharpe plus élevé de 0,01106. Toutefois, cette surperformance s'accompagne d'un accroissement du risque extrême, comme l'indique une Value at Risk à 95 % plus élevée de 0,00788 que celle du CAC 40.

À l'ordre 2, les résultats apparaissent plus favorables. Les portefeuilles dominants en année  $t$  présentent en moyenne un rendement journalier supérieur à celui de l'indice en  $t + 1$  d'environ 0,00064, tout en affichant une Value at Risk à 95 % plus faible de 0,00408. Le ratio de Sharpe est également plus élevé, avec un écart moyen de 0,02186, ce qui suggère un meilleur compromis rendement–risque. Ces résultats indiquent que la dominance stochastique d'ordre 2 constitue un critère plus pertinent que la dominance d'ordre 1 pour guider l'allocation d'un investisseur averse au risque.

Dans l'ensemble, ces résultats montrent qu'investir systématiquement dans des portefeuilles dominants stochastiquement en année  $t$  ne garantit pas une surperformance financière en  $t + 1$ . Si la dominance d'ordre 2 est associée, en moyenne, à un meilleur profil rendement–risque que la dominance d'ordre 1, elle ne constitue pas pour autant un critère de sélection suffisant pour assurer une amélioration robuste et exploitable de la performance financière en  $t + 1$  relativement à l'indice CAC 40.

## 6 Discussion et limites

Les résultats obtenus mettent en évidence plusieurs limites inhérentes à l'utilisation de la dominance stochastique comme critère empirique de choix de portefeuille.

Premièrement, les tests de dominance reposent sur des procédures de bootstrap dont la puissance peut être limitée lorsque les distributions de rendements sont proches, comme c'est le cas pour des portefeuilles construits à partir des mêmes actifs sous-jacents.

Deuxièmement, la rareté et l'instabilité temporelle des relations de dominance suggèrent que ce critère est très sensible aux conditions de marché spécifiques à chaque période. Cela complique son utilisation dans une perspective opérationnelle, où l'investisseur cherche des règles de décision stables et reproductibles.

Troisièmement, l'analyse repose sur des portefeuilles statiques de type *buy-and-hold*, sans prise en compte des coûts de transaction, des dividendes ni des stratégies de rééquilibrage dynamique. Ces simplifications, nécessaires dans le cadre du projet, limitent la portée des conclusions en termes d'investissement réel.

## 7 Conclusion

Ce projet a étudié empiriquement la pertinence de la dominance stochastique comme critère de comparaison entre des portefeuilles d'actions et un investissement indiciel passif sur le marché actions français, à partir de données de rendements journaliers sur la période 2015–2025.

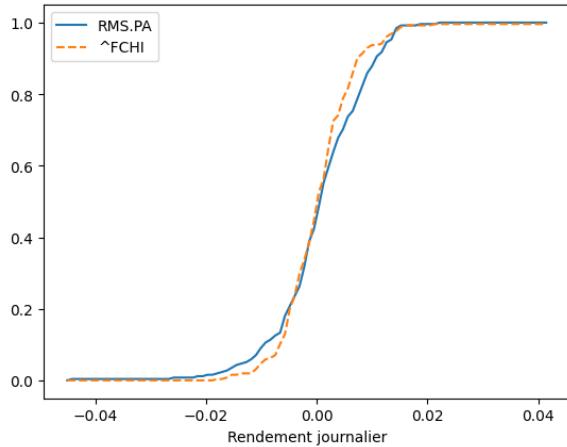
Les résultats montrent que les relations de dominance stochastique sont rares et souvent instables, en particulier à l'ordre 1, où la majorité des portefeuilles ne domine l'indice que de manière ponctuelle. À l'ordre 2, en revanche, l'analyse met en évidence un nombre très limité de portefeuilles dominants, mais dont la dominance peut s'inscrire dans la durée, avec des épisodes persistants sur plusieurs années consécutives. Ces situations sont associées à des phases de surperformance financière ex post, caractérisées par un meilleur compromis rendement–risque en année  $t + 1$ , ce qui contraste avec les résultats plus instables observés à l'ordre 1.

D'un point de vue pratique, ces résultats suggèrent que la dominance stochastique ne constitue pas, à elle seule, un critère suffisant pour justifier une stratégie d'investissement active visant à battre systématiquement un ETF répliquant le CAC 40. L'investissement indiciel apparaît ainsi comme une solution robuste et difficile à surpasser durablement. La dominance stochastique, et en particulier celle d'ordre 2, peut toutefois être mobilisée comme un outil d'analyse permettant d'identifier, sur certaines périodes, des configurations de marché particulièrement favorables, sans fournir pour autant une règle de décision universelle et garantie.

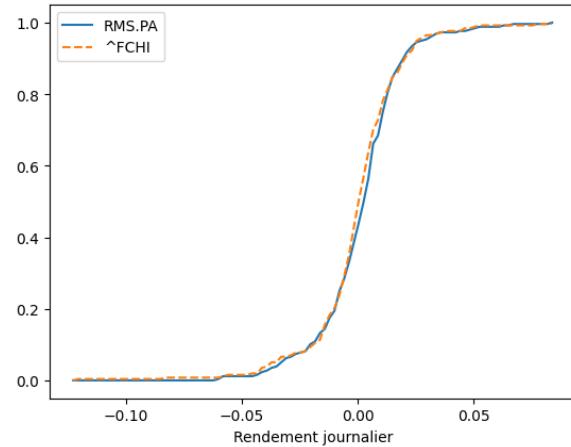
Ce travail met ainsi en évidence l'écart entre la généralité du cadre théorique de la dominance stochastique et la rareté des situations empiriques dans lesquelles celle-ci se manifeste pleinement, tout en soulignant l'intérêt de confronter les outils de la microéconomie de l'incertain à des données financières réelles.

## A Illustrations des fonctions de répartition empiriques

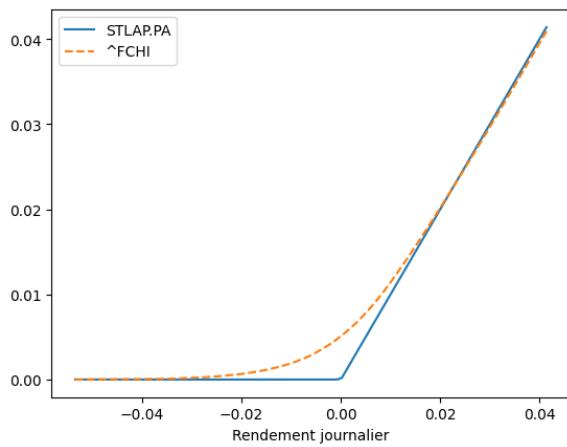
Cette annexe illustre, à partir de deux portefeuilles sélectionnés, la comparaison des fonctions de répartition empiriques (CDF) utilisées dans les tests de dominance stochastique. Les graphiques portent, pour chaque portefeuille, sur une année classée dominante et sur une année de non-dominance.



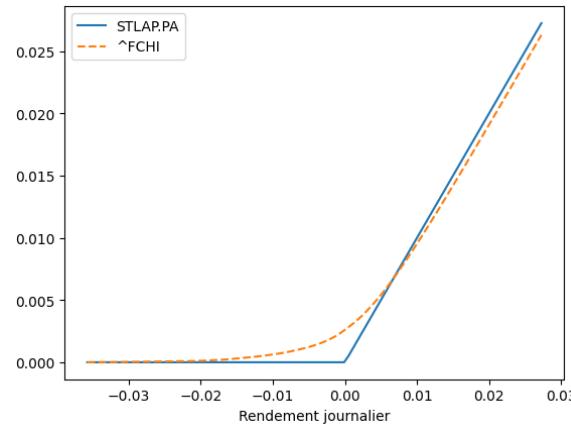
Ordre 1 — Hermès International : année classée dominante



Ordre 1 — Hermès International : année de non-dominance



Ordre 2 — Stellantis N.V. : année classée dominante (CDF intégrée)



Ordre 2 — Stellantis N.V. : année de non-dominance (CDF intégrée)

A l'ordre 1, bien que les graphiques des CDF puissent suggérer l'absence de dominance stochastique car les courbes se croisent, la décision retenue dans ce travail repose sur des tests statistiques formels réalisés avec un niveau de confiance de 5 %. Il est donc possible qu'un portefeuille soit considéré comme dominant par le test même si les CDF empiriques se croisent légèrement, dès lors que ces écarts ne sont pas jugés statistiquement significatifs.

A l'ordre 2, on compare les CDF empiriques intégrées. L'année classée dominante présente une courbe intégrée du portefeuille globalement inférieure à celle de l'indice, tandis que l'année de non-dominance montre un recroisement, indiquant l'absence de dominance d'ordre 2. La décision reste fondée sur le test formel à 5 %.