## Énoncé

Déterminer la limite puis un équivalent de la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$$

## Correction

### 1) La suite récurrente est-elle bien définie ?

Dès qu'on a une suite définie par récurrence on doit s'assurer de la bonne définition de celle-ci. Ici, si on pose $f := \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + e^{-x} \end{cases}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, la suite est bien définie. En d'autres termes, peu importe le rang $n$, on peut toujours calculer $f(u_n)$ afin de connaître $u_{n+1}$.

**Remarque :**
L'exercice peut vite se compliquer si la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ son ensemble de définition.
La démarche à suivre est la suivante :
Il faut trouver $I \subset \mathcal{D}_f$ qui contient $u_0$ et qui est **stable par f** i.e $f(I) \subset I$. Ceci permet d'assurer la bonne définition de la suite. En effet, à chaque rang $n$, on a $u_n \in I \subset \mathcal{D}_f$ ce qui permet de recalculer $u_{n+1} = f(u_n)$.

### Propriétés de la suite

Avant de s'intéresser à la potentielle limite de la suite, c'est toujours une bonne idée de s'intéresser aux propriétés de la suite : **signe constant ? majorations, minorations immédiates ? monotonie ? expression en fonction de $n$ ? limite ?**

### Positivité

Nous disposons de l'inclusion $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$. En effet, une somme de deux termes strictement positifs est strictement positive. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc **strictement positive**.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$$

Raisonner directement sur $f$ nous a évité la rédaction d'une récurrence triviale.

**Croissance**

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a par définition de la suite,

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$$

Comme $-u_n \neq 0$, $e^{-u_n} > 0$. Ainsi,

$$\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante**. Elle admet donc une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et même dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ car elle est positive.

**2) Divergence vers $+\infty$**

Supposons qu'elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_+$. Par continuité de f en $l$, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(l)$. $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $l$ car c'est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

On peut passer à la limite pour obtenir

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = l + e^{-l} \Leftrightarrow \boxed{e^{-l} = 0}$$

L'équation $e^{-l} = 0$ n'a pas de solution réelle. Donc l'hypothèse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absurde. En définitive,

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

**3) Etude asymptotique de la suite**

**Présentation des méthodes**

Il existe deux méthodes classiques **qui ne s'inventent pas** pour obtenir un équivalent d'une suite récurrente d'ordre 1. Le but de ces méthodes est de trouver une fonction $g$ aux "bonnes propriétés" ainsi que $l \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$g(u_{n+1}) - g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} l$$

Les bonnes propriétés de $g$ sont là pour justifier la suite des calculs.
**1)** On justifie que l'on peut sommer cette relation de comparaison pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(u_{k+1}) - g(u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} l$$

$$\Leftrightarrow g(u_n) - g(u_0) \underset{n\to+\infty}{\sim} n.l \quad \underset{g(u_o)\in o(n.l)}{\Leftrightarrow} \quad g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n.l$$

**2)** On justifie que l'on peut en déduire un équivalent de $u_n$ :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g^{-1}(nl)}$$

Dans les cas les plus délicats au lieu de trouver $l \in \mathbb{R}^*$, on trouve une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dont l'expression ne dépend pas de $u_n$) telle que :

$$g(u_{n+1}) - g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Cela complique les calculs. Notamment lors de la sommation des relations d'équivalences où il faut déterminer **la nature** de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ (convergente ou divergente).

**méthode des puissances**

La première méthode consiste à prendre pour fonction $g$ une fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \neq 0$. On étudie alors la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ et **on cherche** $\alpha$ pour lequel il existe $l \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} l$$

L'avantage des fonctions puissances est qu'elles se comportent bien avec les équivalents. Expliquons ce que celà signifie.
En général, lorsque

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

on ne peut pas en déduire, pour une fonction $h$ quelconque

$$h(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} h(v_n)$$

La composition **à gauche** par $h$ ne conserve par la relation d'équivalence.
Voici un contre-exemple :

$$n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad \text{mais} \quad e^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} e^n$$

En effet,

$$\frac{e^{n+1}}{e^n} = e \xrightarrow[n\to+\infty]{} e \neq 1$$

Avec les fonctions puissances on peut composer par la gauche les relations d'équivalence,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$$

Donc quand on arrive à l'équivalent :

$$(u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} nl$$

On peut en déduire :

$$((u_n)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} (nl)^{\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (nl)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Il faut noter que parfois, il n'existe pas de $\alpha \neq 0$ tel que

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} l$$

La méthode des puissances est alors infructueuse. La méthode de l'équation différentielle, moins connue, est plus générale.

**méthode de l'équation différentielle**

La deuxième méthode consiste à rapprocher la relation de récurrence qui définit la suite à **une équation différentielle**. C'est une heuristique permettant de trouver un bon candidat pour la fonction $g$ de la section **présentation des méthodes**.

Voici comment s'y prendre :
Supposons qu'il existe une fonction élémentaire $h$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} h(n)$. On suppose que $h$ possède toutes les bonnes propriétés permettant de justifier les calculs qui vont suivre.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après le théorème des accroissements finis appliqué sur $[n, n+1]$, on dispose de $c_n \in ]n, n+1[$ tel que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{(n+1) - n} \underset{accroissements\ finis}{=} h'(c_n) \underset{n\to+\infty}{\approx} h'(n)$$

Donc

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\approx} h'(n)}$$

Le fait d'assimiler la différence $u_{n+1} - u_n$ à la dérivée d'une fonction est à la base de la méthode de l'équation différentielle. On utilise **systématiquement** ce parallèle.
L'idée est de **faire apparaître cette différence**. Ici c'est facile car l'expression de la relation de récurrence le permet immédiatement. Sinon, on doit forcer cette apparition en faisant par exemple un développement limité de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. Nous illustrerons cette idée dans un prochain exercice.

Enfin, si l'on fait tendre $n$ vers $+\infty$ dans

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$$

En utilisant $e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\approx} e^{-g(n)}$, on se retrouve avec

$$g'(n) \underset{n\to\infty}{\approx} e^{-g(n)}$$

$$\Leftrightarrow g'(n).e^{g(n)} \underset{n\to\infty}{\approx} 1$$

$g$ est solution au voisinage de $+\infty$ de l'équation différentielle :

$$y'e^y = 1$$

On peut réecrire cette égalité :

$$(e^y)' = 1$$

En réutilisant l'analogie dérivée/différence de deux termes consécutifs dans l'autre sens,

$$e^{g(n+1)} - e^{g(n)} \underset{n\to\infty}{\approx} 1$$

Qui se réécrit,

$$\boxed{e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to\infty}{\approx} 1}$$

Ainsi, l'heuristique nous suggère d'étudier la quantité $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ et l'on devrait trouver $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. La fonction $g$ de la section **présentation des méthodes** est donc l'exponentielle.

### Application infructueuse de la méthode des puissances

On applique à la lettre la méthode 1 pour voir ce que cela donne ici.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = (u_n + e^{-u_n})^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha((1 + \frac{e^{-u_n}}{u_n})^\alpha - 1)$$

On utilise la formule $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha(1 + \alpha\frac{e^{-u_n}}{u_n} + o(\frac{e^{-u_n}}{u_n}) - 1)$$

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = {u_n}^{\alpha-1}e^{-u_n} + o({u_n}^{\alpha-1}e^{-u_n})$$

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} {u_n}^{\alpha-1}e^{-u_n}$$

Peu importe la valeur de $\alpha$, par croissance comparée, le terme de droite tend vers 0. La méthode des puissances n'aboutit pas.

## 4) Application de la méthode de l'équation différentielle

Etudions, comme suggéré par l'heuristique, la quantité $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n}$$

La limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de cette quantité est indéterminée car de la forme $+\infty - +\infty$. Factorisons par $e^{u_n}$ pour essayer de lever cette indétermination.

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} = e^{u_n}(e^{e^{-u_n}} - 1)$$

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{donc} \quad e^{-u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Effectuons alors un développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle en 0 :

$$e^{e^{-u_n}} = 1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n}) \quad \text{que l'on peut remplacer dans} \quad e^{u_{n+1}} - e^{u_n},$$
$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n}(1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n}) - 1)$$

$$\Leftrightarrow e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = 1 + o(1)$$

Ce qui se réécrit,

$$\boxed{e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{ou} \quad e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1}$$

A partir de cette différence télescopique, il y a deux façons de trouver un équivalent de $e^{u_n}$.

## 5) 1ère méthode : Sommation des relations de comparaison

Appliquons un théorème de sommation des relations de comparaison :
La suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge grossièrement. D'après le théorème de sommation des relations d'équivalences,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_{k+1}} - e^{u_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

(Ici j'ai pris la somme jusqu'à $n-1$ en anticipant pour tomber sur $e^{u_n}$ après le télescopage).

$$\Leftrightarrow e^{u_n} - e^{u_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

$e^{u_0} \in o(e^{u_n})$ car c'est une constante donc négligeable devant $e^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

$$\Leftrightarrow \boxed{e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

## 2ème méthode : Application du théorème de Cesàro

La suite $(e^{u_{n+1}} - e^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge 1. D'après le théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_{k+1}} - e^{u_k} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

$$\frac{1}{n}(e^{u_n} - e^{u_0}) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

Comme $\frac{1}{n}e^{u_0} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, Finalement

$$\frac{1}{n}e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow \boxed{e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

## 6) Déduction d'un équivalent de $u_n$

Arrivé à cette étape, on a qu'une envie c'est d'appliquer $ln$ pour avoir successivement

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \;\Rightarrow\; ln(e^{u_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n) \;\Rightarrow\; u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$$

Justifions que l'on a le droit de faire cela en démontrant, plus généralement, que le $ln$ se comporte bien avec les équivalents **sauf en** 1.

**Démonstration :**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes avec $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ayant pas 1 pour valeur d'adhérence.
Montrons que $ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(y_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{ln(x_n)}{ln(y_n)} = \frac{ln(x_n) - ln(y_n) + ln(y_n)}{ln(y_n)}$$

On a effectué un classique "ajouté/retranché" pour forcer l'apparition de la quantité $\frac{x_n}{y_n}$ pour laquelle on a des informations.

$$\Leftrightarrow \frac{ln(x_n)}{ln(y_n)} = \frac{ln(\frac{x_n}{y_n})}{ln(y_n)} + 1$$

$$\frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{car} \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$$

Par continuité de $ln$ en 1,

$$ln(\frac{x_n}{y_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} ln(1) = 0$$

On a même,

$$|ln(\frac{x_n}{y_n})| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ensuite, comme 1 n'est pas valeur d'adhérence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 0 n'est pas valeur d'adhérence de $(ln(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. On dispose donc de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ainsi que d'un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ à partir duquel :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > N_\varepsilon \Rightarrow |ln(y_n)| > \varepsilon$$

Supposons par la suite que $n > N_\varepsilon$.
On en déduit, par stricte décroissance de la fonction inverse,

$$|\frac{1}{ln(y_n)}| < |\frac{1}{ln(\varepsilon)}|$$

Finalement, en multipliant par $|ln(\frac{x_n}{y_n})| \geq 0$,

$$|\frac{ln(\frac{x_n}{y_n})}{ln(y_n)}| \leq |\frac{ln(\frac{x_n}{y_n})}{ln(\varepsilon)}|$$

Le membre de droite tendant vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, d'après le théorème d'encadrement,

$$|\frac{ln(\frac{x_n}{y_n})}{ln(y_n)}| \underset{n\to 0}{\to} 0$$

Donc

$$\frac{ln(x_n)}{ln(y_n)} = \frac{ln(\frac{x_n}{y_n})}{ln(y_n)} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln(x_n)}{ln(y_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(y_n)}$$

□

Dans notre cas particulier,
$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n)_{n\in\mathbb{N}}$ est postive à partir du rang 1 et n'admet pas 1 pour valeur d'adhérence.
Donc,

$$ln(e^{u_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)}$$

□

**Résumé de la preuve**

1) On vérife que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **existe** et on étudie ses propriétés de base : **positive, croissante**.
2) On montre par l'absurde qu'elle **diverge vers** $+\infty$.
3) On étudie la quantité $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ suggérée par la méthode de l'équation différentielle.
4) En faisant un DL : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
5) On somme les équivalents pour trouver : $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
6) On applique le $ln$ dans l'équivalent (licite ici) : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)}$