Énoncé

Déterminer la limite puis un équivalent de la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$$

Correction

1) On vérife que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **existe** et on étudie ses propriétés de base : **positive, croissante**.
2) On montre par l'absurde qu'elle **diverge vers** $+\infty$.
3) On étudie la quantité $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ suggérée par la méthode de l'équation différentielle.
4) En faisant un DL : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
5) On somme les équivalents pour trouver : $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
6) On applique le ln dans l'équivalent (licite ici) : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)}$