Énoncé

On considère toujours la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$$

dont on rappelle les propriétés démontrées dans l'exercice
Développement asymptotique d'une suite récurrente d'ordre 1 :
1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, croissante et diverge vers $+\infty$.
2) $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

Cet exercice est la suite naturelle après avoir déterminé un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La méthode pour y parvenir est simple et systématique, nous la présentons dans cette correction.

Méthode pour poursuivre un développement asymptotique

1) Avoir obtenu un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En général, il est nécessaire d'avoir d'abord un équivalent pour obtenir un développement asymptotique à l'ordre 2. Cependant, dans certains cas on obtient directement un développement asymptotique à l'ordre 2 après avoir sommé les équivalents.

2) Etudier la quantité $(e^{u_{n+1}} - (n+1)) - (e^{u_n} - n)$ **et pousser le DL un cran plus loin**.
Tout d'abord, on étudie la suite $(e^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ car c'est cette suite qui nous a permis d'obtenir en premier lieu l'équivalent de u_n quand $n \to +\infty$. On rappelle que l'étude de cette suite avait été suggérée par **la méthode de l'équation différentielle**. Ensuite, pour obtenir plus de précision dans le développement asymptotique de e^{u_n}, il faut trouver un équivalent de la suite moins son équivalent : $e^{u_n} - n$. Pour cela, on étudie la différence de **deux termes consécutifs** $(e^{u_{n+1}} - (n+1)) - (e^{u_n} - n)$, on en cherche un équivalent grâce à des développements limités plus précis que ceux utilisés quand on avait déterminé un équivalent de $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ dans l'exercice *Développement asymptotique d'une suite récurrente d'ordre 1.*

3) En déduire un développement asymptotique à l'ordre 2 **de** u_n **quand** $n \to +\infty$**.**
Après avoir trouvé un équivalent de $(e^{u_{n+1}} - (n+1)) - (e^{u_n} - n)$, il ne reste plus qu'à sommer (si c'est possible) pour obtenir un équivalent de $e^{u_n} - n$. Ceci fournit directement un développement asymptotique à l'ordre 2 de e^{u_n}. Enfin, il suffit de composer par ln et d'utiliser son développement limité usuel en 1 pour avoir un développement asymptotique à l'ordre 2 de u_n.

Mise en oeuvre de la méthode

Soit $n \in \mathbb{N}$.

2) Etude de $(e^{u_{n+1}} - (n+1)) - (e^{u_n} - n)$.

Pour plus de lisibilité, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n := e^{u_n} - n$. On utilise successivement la relation de récurrence, une factorisation par e^{u_n} et le fait que $e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$:

$$v_{n+1} - v_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} - 1 \underset{\text{relation de récurrence}}{=} e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} - 1$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n \underset{\text{factorisation}}{=} e^{u_n}(e^{e^{-u_n}} - 1) - 1 \underset{\text{DL de exp en 0}}{=} e^{u_n}(1 + e^{-u_n} + \frac{e^{-2u_n}}{2!} + o(e^{-2u_n}) - 1) - 1$$

Remarque :
Dans l'étape 2 de la méthode, quand j'ai écrit *pousser le DL un cran plus loin*, je faisais référence à cette étape de calcul. Initialement pour obtenir l'équivalent de $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$, j'avais utilisé la formule $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, ce qui était suffisant. Ici j'ai utilisé $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, j'ai donc poussé le DL un cran plus loin. Si je m'étais arrêté à $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, j'aurais obtenu :

$$v_{n+1} - v_n = e^{u_n}(e^{e^{-u_n}} - 1) - 1 = e^{u_n}(1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n}) - 1) - 1 = e^{u_n}(e^{-u_n} + o(e^{-u_n})) - 1$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = 1 + o(1) - 1 = o(1)$$

$$v_{n+1} - v_n = o(1)$$

Cette relation n'est pas assez précise pour conclure. En sommant cette relation ($(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge), on retrouve le résultat $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. En effet,

$$v_{n+1} - v_n = o(1) \underset{\textit{sommation}}{\Rightarrow} v_n - v_0 = o(\sum_{k=0}^{n-1} 1) \Rightarrow v_n = o(n) \underset{\text{def de } v_n}{\Leftrightarrow} e^{u_n} - n = o(n) \Leftrightarrow e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Fin de la remarque.

Reprenons nos calculs :

$$v_{n+1} - v_n = e^{u_n}(e^{-u_n} + \frac{e^{-2u_n}}{2!} + o(e^{-2u_n})) - 1$$

$$v_{n+1} - v_n \underset{\text{distribution de } e^{u_n}}{=} 1 + \frac{e^{-u_n}}{2} + o(e^{-u_n}) - 1$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{e^{-u_n}}{2} + o(e^{-u_n})$$

Donc

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-u_n}$$

L'énoncé nous rappelle que : $e^{u_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} n$, comme les équivalents se comportent bien avec les puissances, on en déduit : $\frac{1}{e^{u_n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Comme $e^{-u_n} = \frac{1}{e^{u_n}}$, on a finalement :

$$\boxed{v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

3) Sommation des équivalents

La suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique), d'après le théorème de sommation des équivalents,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\underset{\text{télescopage}}{\Leftrightarrow} v_n - v_1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \underset{v_0 \in o(v_n)}{\Leftrightarrow} \quad v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

On utilise ensuite le résultat classique

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n-1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

(Le ln se comporte bien avec les équivalents en $+\infty$, voir exercice *Développement asymptotique d'une suite récurrente d'ordre 1*). Ceci donne par transitivité de $\sim$,

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

Donc en revenant à la définition de v_n,

$$e^{u_n} - n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

$$\Leftrightarrow e^{u_n} - n = \ln(n) + \underset{n \to +\infty}{o}(\ln(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{e^{u_n} = n + \ln(n) + \underset{n \to +\infty}{o}(\ln(n))}$$

On a un développement asymptotique à deux termes de e^{u_n}. On peut finalement en déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n. On compose par ln :

$$\ln(e^{u_n}) = \ln(n + \ln(n) + \underset{n \to +\infty}{o}(\ln(n)))$$

Idée importante : On factorise par le terme dominant dans le ln :

$$\Leftrightarrow u_n = \ln(n(1 + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n}))) \quad \Leftrightarrow \quad u_n \underset{\text{propriétés du ln}}{=} \ln(n) + \ln(1 + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n}))$$

$\frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n})$ est une quantité qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (croissance comparée).
On peut donc utiliser le développement limité en 1 de ln : $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n}) + o(\frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n}))$$

Comme $o(\frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n})) \subset \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n})$, on a finalement :

$$\boxed{u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n})}$$

□

Remarque finale :
La méthode présentée ici permet de déduire **de proche en proche** un développement asymptotique à n'importe quel ordre une fois que l'on connaît l'équivalent. Pour poursuivre avec un développement asymptotique à l'ordre 3, il suffit de trouver un équivalent de $(e^{u_{n+1}} - (n+1) - \ln(n+1)) - (e^{u_n} - n - \ln(n))$ (car $\ln(n)$ est l'équivalent de $e^{u_n} - n$). Une fois l'équivalent trouvé et si les conditions le permettent, on somme les équivalents pour avoir un équivalent de $e^{u_n} - n - \ln(n)$ et enfin on écrit cette relation sous forme de développement limité et on refait des calculs pour trouver un développement asymptotique à l'ordre 3 de u_n.

Résumé de la preuve

1) Trouver un équivalent de $(e^{u_{n+1}} - (n+1)) - (e^{u_n} - n)$:

$$(e^{u_{n+1}} - (n+1)) - (e^{u_n} - n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

2) Sommer les équivalents ($(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente) :

$$e^{u_n} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

3) Utiliser $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et réécrire 2) sous forme de développement limité :

$$e^{u_n} = n + \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$$

4) Composer par ln pour retomber sur u_n, factoriser par le terme dominant dans le ln et utiliser le DL usuel de ln au bon ordre :

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{\ln(n)}{n})$$