Énoncé

On considère toujours la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$$

dont on rappelle les propriétés démontrées dans l'exercice
Développement asymptotique d'une suite récurrente d'ordre 1 :
1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, croissante et diverge vers $+\infty$.
2) $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1) Trouver un équivalent de $(e^{u_{n+1}} - (n+1)) - (e^{u_n} - n)$:

$$(e^{u_{n+1}} - (n+1)) - (e^{u_n} - n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

2) Sommer les équivalents ($(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente) :

$$e^{u_n} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

3) Utiliser $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et réécrire 2) sous forme de développement limité :

$$e^{u_n} = n + \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$$

4) Composer par ln pour retomber sur u_n, factoriser par le terme dominant dans le ln et utiliser le DL usuel de ln au bon ordre :

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$