Énoncé

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $F \subset \mathbb{R}^3$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 tel que $f^2 = 0$ et $f(F) \subset F$. Montrer que : $\mathcal{I}m(f) \subset F$.

Correction

Analyse de l'énoncé

La première chose à remarquer à la vue de l'énoncé est le fait que l'on se place dans $\mathbb{R}^3$. Pourquoi avoir choisi $\mathbb{R}^3$ et pas simplement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ? Où même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque ? Sans même avoir la résolution en tête, ces hypothèses nous incitent à utiliser la petite dimension de $\mathbb{R}^3$ comme argument ainsi que les outils de la dimension finie : représentation matricielle, théorème du rang etc...

Schéma pour entamer la résolution

Le contexte de l'exercice étant la dimension finie et plus particulièrement la dimension 3, nous pouvons facilement représenter certains objets de l'exercice. Cela peut donner des idées menant à la résolution. Nous représentons donc F qui, par hypothèse, est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. C'est un **plan vectoriel**. Nous représentons également deux de ses supplémentaires. Ce sont des **droites vectorielles**. Les objets représentés sont des sous-espaces vectoriels donc ils contiennent 0 et doivent passer par l'origine.

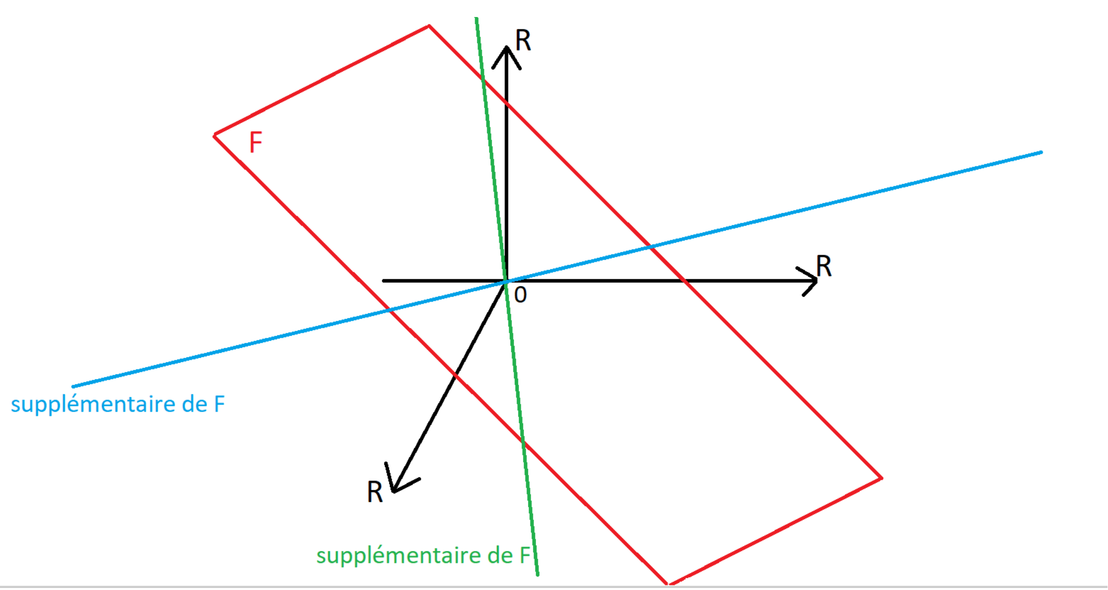

Figure 1 – Supplémentaires de F

Propriété importante des hyperplans

Comme on peut le voir sur le schéma, F possède beaucoup de supplémentaires simples. Toute droite non incluse dans F et passant par l'origine est un supplémentaire de F. Plus précisément, nous disposons de la propriété suivante :
Tout élément $y \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $y \notin F$ génère une droite vectorielle $\text{Vect}(y)$,
supplémentaire de F : $F \oplus \text{Vect}(y) = \mathbb{R}^3$.

Idée
Au lieu de prendre un supplémentaire quelconque de F dont l'existence est donnée par définition d'un hyperplan, on en choisit un pertinent.

Choix d'un bon supplémentaire

Revenons à l'exercice et essayons d'appliquer l'idée ci-dessus, sans forcément savoir si cela aide à la résolution.
Soit $x \in \mathbb{R}^3$.
Pour montrer que $\mathcal{I}m(f) \subset F$, il suffit de montrer que $f(x) \in F$.

1ère idée :
Pouvons-nous prendre $\text{Vect}(x)$ comme supplémentaire de F ?

Cela est possible **si et seulement si** $x \notin F$.
On a donc une disjonction de cas naturelle à mener.

1er cas : $x \in F$

Si $x \in F$ alors d'après la propriété vérifiée par f, $f(x) \in F$ et c'est fini.

2ème cas : $x \in F$

D'après ce qui précède, $F \oplus \text{Vect}(x) = \mathbb{R}^3$.
Remarque :
Pourquoi ne pas avoir essayé de prendre $\text{Vect}(f(x))$ pour supplémentaire ?
Tout simplement car le but de l'exercice étant de montrer que $f(x) \in F$, on sait, si l'énoncé est correct qu'il ne pourra pas être un supplémentaire de F. On peut néanmoins le prendre pour supplémentaire si on raisonne par l'absurde en supposant que $f(x) \notin F$. C'est une piste envisageable. Il n'y a pas d'autres supplémentaires raisonnables envisageables.

Utilisation de la décomposition $F \oplus \text{Vect}(x) = \mathbb{R}^3$

On cherche des informations sur $f(x)$. Peut-être qu'en le décomposant selon la **somme directe** $F \oplus \text{Vect}(x)$ on va pouvoir avancer.
On dipose d'un **unique** couple $(a_F, \lambda) \in F \times \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = a_F + \lambda.x$$

Maintenant, composons cette égalité par f afin d'exploiter $f^2 = 0$ donnée par l'énoncé.

Par linéarité de f,

$$f^2(x) = f(a_F) + \lambda.f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda f(x) = -f(a_F) \quad \text{car } f^2(x) = 0$$

Or, $a_F \in F$ donc $f(a_F) \in F$ car $f(F) \subset F$. Comme F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il est stable par multiplication par un scalaire donc $\lambda f(x) = -f(a_F) \in F$.
Vient alors une nouvelle disjonction :

Si $\lambda \neq 0$:

$$f(x) = -\frac{1}{\lambda} f(a_F) \in F \quad \text{car F est un sous-espace vectoriel}$$

Si $\lambda = 0$:

On revient directement à la décomposition de $f(x)$:

$$f(x) = a_F + \lambda.x \;\Rightarrow\; f(x) = a_F \in F$$

Dans tous les cas $f(x) \in F$ et on conclut que F est stable par f .

Remarque :
La résolution proposée ici utilise la dimension finie seulement pour dire qu'un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans un espace vectoriel de dimension 3 admet une droite pour supplémentaire.Mais nous n'avons pas besoin de la dimension finie pour cela. Les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels possédant cette propriété.
Donc on a prouvé que si f est un endormorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui stabilise un hyperplan H et qui vérifie $f^2 = 0$ alors $\mathcal{I}m(f) \subset H$.

Résumé de la preuve

1) Prendre $x \in \mathbb{R}^3$. Si $x \in F$ alors $f(x) \in F$ car f stabilise F. On suppose que $x \notin F$.
2) Ecrire : $F \oplus \text{Vect}(x) = \mathbb{R}^3$ et décomposer $f(x)$ selon cette somme directe, $f(x) = a_F + \lambda x$
3) Composer par f l'égalité, pour obtenir $\lambda f(x) = -f(a_F)$
4) Si $\lambda \neq 0$, $f(x) = -\frac{1}{\lambda} f(a_F) \in F$
5) Si $\lambda = 0$, de 2) on tire $f(x) = a_F \in F$