Énoncé

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $F \subset \mathbb{R}^3$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 tel que $f^2 = 0$ et $f(F) \subset F$.
Montrer que : $\mathcal{I}m(f) \subset F$.

Correction

1) Prendre $x \in \mathbb{R}^3$. Si $x \in F$ alors $f(x) \in F$ car f stabilise F. On suppose que $x \notin F$.
2) Ecrire : $F \oplus \text{Vect}(x) = \mathbb{R}^3$ et décomposer $f(x)$ selon cette somme directe, $f(x) = a_F + \lambda x$
3) Composer par f l'égalité, pour obtenir $\lambda f(x) = -f(a_F)$
4) Si $\lambda \neq 0$, $f(x) = -\frac{1}{\lambda} f(a_F) \in F$
5) Si $\lambda = 0$, de 2) on tire $f(x) = a_F \in F$