Énoncé

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que E possède une infinité non dénombrable d'hyperplans.

Correction

Commençons par rappeler les définitions équivalentes d'un hyperplan :

— Le noyau d'une forme linéaire **non nulle** ;
— Un sous-espace vectoriel qui admet une droite pour supplémentaire ;
— Un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, valable uniquement en **dimension finie**.

Vient naturellement la question suivante :

Quelle définition de l'hyperplan choisir pour traiter l'exercice ?

La dimension finie permet une représentation graphique d'un hyperplan. Représentons donc un hyperplan H de $\mathbb{R}^3$.

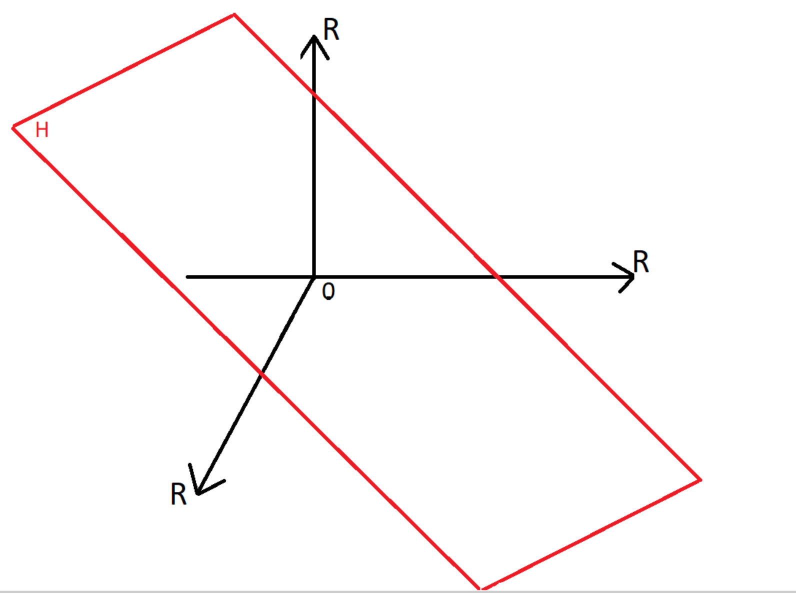

Figure 1 – Hyperplan dans $\mathbb{R}^3$

Tout plan qui passe par l'origine et n'est pas confondu avec H est un hyperplan distinct de H. En changeant l'angle que fait H avec le plan (Oxy), on obtient un nouvel hyperplan distinct. Le changement d'angle pouvant être décrit par un paramètre continu, on obtient de cette manière une infinité non dénombrable d'hyperplans.

Voici une illustration graphique de l'idée : on a augmenté l'angle que fait l'hyperplan avec Oxy à chaque fois. On a ainsi deux nouveaux hyperplans construits selon **le même processus** depuis $H1$.

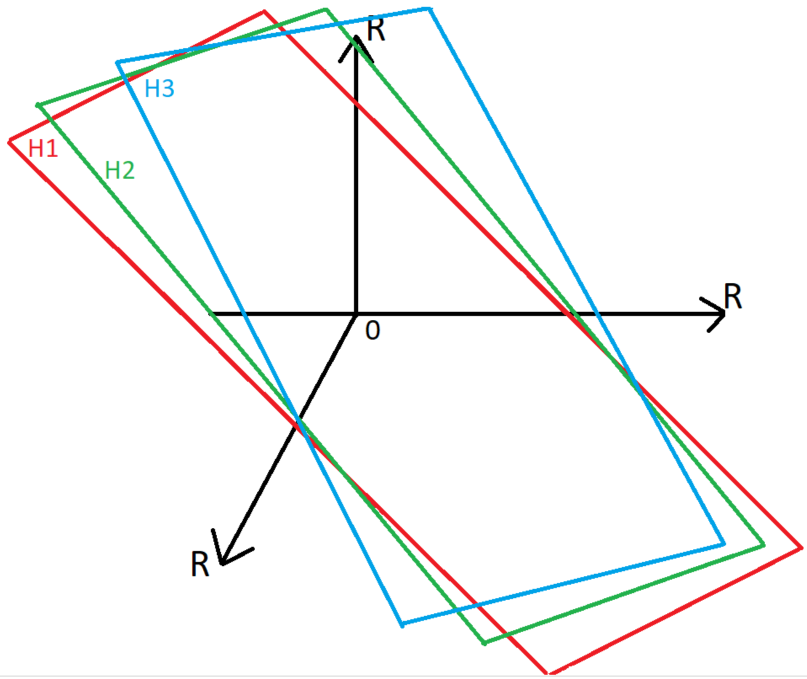

FIGURE 2 – Hyperplans distincts

Idée :
Pour modéliser ce changement d'angle (mouvement à un degré de liberté), on aura besoin d'une base de $H1$ disons (e_1, e_2) et on va modifier la direction de e_2 à l'aide d'un paramètre continu. Si $e_3 \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$, on peut considérer $\text{Vect}(e_1, e_2 + \lambda e_3)$ où λ parcourt un ensemble continu afin de générer une infinité non dénombrable d'hyperplan.

Génération d'une infinité d'hyperplans

On généralise l'idée donnée dans $\mathbb{R}^3$ à E.
Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans de E.
E étant de dimension finie, on dispose d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.
Considérons $H := \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \in \mathcal{H}$.
Soit $\lambda \in [0, 1]$.

1) Montrons que $H_\lambda := \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1} + \lambda e_n) \in \mathcal{H}$.

$(e_1, \dots, e_{n-1} + \lambda e_n)$ est une famille de taille $n - 1$ et génératrice de H_λ.
Montrons qu'elle est libre.
Soit $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n-2} a_k e_k + a_{n-1}(e_{n-1} + \lambda e_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-2} a_k e_k + a_{n-1}.e_{n-1} + a_{n-1}.\lambda e_n = 0$$

Par liberté de $(e_1, \ldots, e_n)$,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \quad a_k = 0 \quad \text{et} \quad a_{n-1}.\lambda e_n = 0$$

Tous les a_k, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ sont nuls donc la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1} + \lambda e_n)$ est libre. $(e_1, \ldots, e_{n-1} + \lambda e_n)$ est une famille libre et génératrice de H_λ donc c'en est une base. Cette famille étant de taille $n-1$, H_λ est de dimension $n-1$ et c'est bien hyperplan de E.

2) Montrons que les H_λ, $\lambda \in [0,1]$ sont tous distincts.

Soit $(\lambda, \mu) \in [0,1]$ tels que $\lambda \neq \mu$.
Pour montrer que $H_\lambda \neq H_\mu$, il suffit de montrer que $H_\lambda \not\subset H_\mu$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on montre que $e_{n-1} + \lambda e_n \notin H_\mu$ (on sait déjà que $e_{n-1} + \lambda e_n \in H_\lambda$).
Supposons que $e_{n-1} + \lambda e_n \in H_\mu$.
Par définition de Vect, on dispose de $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que :

$$e_{n-1} + \lambda e_n = \sum_{k=1}^{n-2} a_k e_k + a_{n-1}(e_{n-1} + \mu e_n)$$

On met tous les termes du même côté et on les réorganise afin d'exploiter la liberté des $(e_1, \ldots, e_{n-1})$:

$$\sum_{k=1}^{n-2} a_k e_k + (a_{n-1} - 1)e_{n-1} + (a_{n-1}\mu - \lambda)e_n = 0$$

Par liberté de $(e_1, \ldots, e_{n-1})$,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-2\} \; a_k = 0 \quad \text{et} \quad a_{n-1} = 1 \quad \text{et} \quad a_{n-1}\mu = \lambda$$

Donc

$$\lambda = \mu$$

C'est absurde.
Ainsi,

$$e_{n-1} + \lambda e_n \notin H_\mu \text{ et } H_\lambda \not\subset H_\mu$$

Donc

$$\boxed{H_\lambda \neq H_\mu}$$

Conclusion
L'application :

$$f : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathcal{H} \\ \lambda \longmapsto H_\lambda \end{cases} \qquad \text{est injective}$$

Comme $[0,1]$ est non dénombrable, $\mathcal{H}$ l'est aussi.

$\boxed{E \text{ possède une infinité non dénombrable d'hyperplans.}}$

Remarque finale :
Cette preuve s'adapte facilement pour montrer les résultats suivants (toujours en dimension finie) :
- Infinité non dénombrable d'espaces vectoriels de dimension $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
- Infinité non dénombrable de supplémentaires d'un espace vectoriel de dimension $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Résumé de la preuve

1) Soit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, considérer pour $\lambda \in [0,1]$ $\mathcal{H}_\lambda := \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1} + \lambda e_n)$.
2) Montrer que $\mathcal{H}_\lambda$ est un hyperplan en montrant la liberté de $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1} + \lambda e_n)$.
3) Considérer $f : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathcal{H} \\ \lambda \longmapsto H_\lambda \end{cases}$ où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des hyperplans de E et montrer que f est injective. Pour cela, montrer que si $\lambda \neq \mu$ sont dans $[0,1]$, $e_{n-1} + \mu e_n \in \mathcal{H}_\mu \setminus \mathcal{H}_\lambda$ en raisonnant par l'absurde.
4) Conclure : $\mathcal{H}$ n'est pas dénombrable car $[0,1]$ qui n'est pas dénombrable s'injecte dans $\mathcal{H}$.