## Énoncé

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $E$ possède une infinité non dénombrable d'hyperplans.

## Correction

1) Soit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$, considérer pour $\lambda \in [0,1]$ $\mathcal{H}_\lambda := \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1} + \lambda e_n)$.
2) Montrer que $\mathcal{H}_\lambda$ est un hyperplan en montrant la liberté de $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1} + \lambda e_n)$.
3) Considérer $f : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathcal{H} \\ \lambda \longmapsto H_\lambda \end{cases}$ où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des hyperplans de E et montrer que f est injective. Pour cela, montrer que si $\lambda \neq \mu$ sont dans $[0,1]$, $e_{n-1} + \mu e_n \in \mathcal{H}_\mu \setminus \mathcal{H}_\lambda$ en raisonnant par l'absurde.
4) Conclure : $\mathcal{H}$ n'est pas dénombrable car $[0,1]$ qui n'est pas dénombrable s'injecte dans $\mathcal{H}$.