Énoncé

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et ayant un moment d'ordre deux. Soit $a \in]0,1[$. Montrer : $\mathbb{P}(X \geq a\,\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2 \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

Correction

L'inégalité est-elle bien définie ?

On commence par s'interroger sur la bonne définition des termes de cette inégalité.
En effet, une variable aléatoire n'admet pas forcément une espérance.
On note $X(\Omega) := \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$ pour la suite.
Pour rappel, l'espérance d'une variable aléatoire discrète réelle X : $\begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{cases}$ est définie lorsque c'est possible par $\mathbb{E}(X) := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$. La série numérique mise en jeu n'est pas nécessairement absolument convergente ou à termes positifs (qui est le cadre dans lequel on se place pour parler de l'espérance d'une variable aléatoire).

Viennent donc naturellement ces questions : $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ sont-ils bien définis ? $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$? Dans l'énoncé, on a l'hypothèse "X a un moment d'ordre deux". Ceci signifie que $\mathbb{E}(X^2)$ existe et $\mathbb{E}(X^2) \in \mathbb{R}$. (Comme X est réelle, X^2 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc par positivité de l'espérance, on a même $\mathbb{E}(X^2) \geq 0$).
Le fait que $\mathbb{E}(X^2) \in \mathbb{R}$ permet d'en déduire que $\mathbb{E}(X)$ existe et $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$.

En effet, on dispose de l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq 1 + x^2$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour la démontrer on utilise :

$$(1-|x|)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow 1 - 2|x| + |x|^2 \geq 0 \quad \underset{|x|^2 = x^2}{\Rightarrow} 1 + x^2 \geq 2|x| \quad \underset{2|x| \geq |x|}{\Rightarrow} 1 + x^2 \geq |x|$$

On applique cette inégalité à x_n, $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq 1 + x_n^2$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) \leq 1 \cdot \mathbb{P}(X = x_n) + x_n^2\mathbb{P}(X = x_n)$$

Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité et X une variable aléatoire discrète, on a :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(X \in \{x_n, n \in \mathbb{N}\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$$

et par hypothèse,

$$\mathbb{E}(X^2) \underset{\text{formule de transfert}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2\mathbb{P}(X = x_n) \in \mathbb{R}_+$$

Par comparaison de familles sommables à termes positifs, $(|x_n|\mathbb{P}(X = x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable donc X admet une espérance réelle, $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}_+$.
On a démontré que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ étaient bien définis mais on ne sait pas si $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$. En fait l'énoncé est incomplet car on peut très bien avoir une variable aléatoire positive, admettant un moment d'ordre deux et d'espérance nulle.

Voici un exemple tout simple :
On considère l'espace probabilisable $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ muni de la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur les événements élémentaires par :

$$\mathbb{P} \colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbb{P}(0) = 0$ et $\mathbb{P}(1) = 1$.
$(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. On définit dessus la variable aléatoire réelle discrète $X \colon \begin{cases} \{0,1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 10 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$

Donc $X(0) = 10$ et $X(1) = 0$.
Alors X admet une espérance car elle est finie et l'espace probabilisé est fini,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 10 \cdot \mathbb{P}(X = 10) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) \\ &= 10 \cdot \mathbb{P}(0) + 0 \cdot \mathbb{P}(1) \quad \text{car} \quad \{X = 10\} := X^{-1}(10) = 0 \quad \text{et} \quad \{X = 0\} := X^{-1}(0) = 1 \\ \mathbb{E}(X) &= 10 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Dans ces conditions, on démontre que la variable aléatoire est nulle presque sûrement ($\mathbb{P}(X=0)=1$). On ajoute donc l'hypothèse $\mathbb{E}(X) \neq 0$.
Après avoir vérifié que l'inégalité a un sens, nous allons la démontrer.

Recherche d'éléments du cours qui peuvent aider

Dans le cours de MP, on dispose d'une inégalité qui ressemble à cette inégalité, **l'inégalité de Markov** :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Seulement ici, l'inégalité est dans l'autre sens donc appliquer cette inégalité directement ne permet pas d'avancer dans la résolution de l'exercice.

On peut avoir une deuxième intuition :
la présence de termes quadratiques dans cette inégalité fait immédiatement penser à **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\forall X, Y \in \mathrm{L}^2 \quad \mathbb{E}^2(XY) \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

où L^2 désigne l'ensemble des variables aléatoires de carré sommable. Il faudra sûrement l'appliquer à un moment donné.
On voit qu'on ne peut pas appliquer directement l'inégalité de Markov ou de Cauchy-Schwarz, il faut donc travailler un peu cette inégalité.

Étape 1 : Réécriture de l'inégalité

Idée importante
En probabilités, quand on a une inégalité à démontrer impliquant une espérance, on peut essayer de l'exprimer uniquement en termes d'espérance mathématique.
On utilise pour cela la formule valable pour tout événement A de la tribu :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$$

On peut ainsi se ramener à démontrer une inégalité entre fonctions. En effet, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes alors si on veut montrer que $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ il est suffisant (mais pas nécessaire) de montrer que $X \leq Y$ car par **croissance de l'espérance**, on aura $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
C'est sur cette idée que repose **la démonstration de l'inégalité de Markov !**

Rappelons la démonstration pour illustrer ce propos.

Démonstration :
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire discrète positive qui admet une espérance finie.
Soit $\omega \in \Omega$.
En distinguant selon que $\omega \in \{X \geq a\}$ ou $\omega \notin \{X \geq a\}$, on montre dans les deux cas que

$$a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}(\omega) \leq X(\omega)$$

(On fait cette distinction pour pouvoir calculer $\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}$ et vérifier que l'inégalité est tout le temps vraie).
On en déduit l'inégalité entre fonctions :

$$a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$$

Par **croissance de l'espérance**,
(On peut calculer l'espérance de $\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}$ car X est une variable aléatoire donc $\{X \geq a\}$ est un événement, dans le cas contraire l'espérance ne serait pas définie).

$$\mathbb{E}(a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}) \leq \mathbb{E}(X)$$

On utilise ensuite la linéarité de l'espérance pour sortir le a puis on divise de part et d'autres par $a > 0$ et applique l'identité $\mathbb{P}(\{X \geq a\}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \geq a\}})$ pour tomber sur **l'inégalité de Markov** :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}}$$

Revenons à la démonstration :
Pour notre identité à démontrer $\mathbb{P}(X \geq a\,\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2\frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$, on réécrit le terme de gauche avec une espérance et on passe le $\mathbb{E}(X^2) > 0$ de l'autre côté de l'inégalité pour obtenir l'inégalité équivalente à démontrer :

$$\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) \geq (1-a)^2\mathbb{E}(X)^2$$

Par linéarité de la fonctionnelle $\mathbb{E}$,

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) \geq \mathbb{E}((1-a)X)^2}$$

(On a fait rentrer le (1-a) dans le carré puis le (1-a) dans l'espérance, c'est là que la linéarité intervient.)

Piste infructueuse

Sous cette nouvelle forme, on peut vouloir appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, X et $\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}$ sont deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre deux.
De plus, comme $\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}$ ne prend ses valeurs que dans $\{0, 1\}$ on a :

$$\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} = \mathbf{1}^2_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}$$

le terme de gauche de l'inégalité s'écrit :

$$\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) \geq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})^2$$

Si on montre l'inégalité entre fonctions :

$$X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} \geq (1-a)X$$

alors on aura par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) \geq \mathbb{E}((1-a)X)$$

Puis comme les termes mis en jeu sont positifs, on obtient par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})^2 \geq \mathbb{E}((1-a)X)^2$$

D'où par transitivité :

$$\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) \geq \mathbb{E}((1-a)X)^2$$

Ce qui est l'inégalité recherchée.
Malheureusement, l'inégalité $X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} \geq (1-a)X$ est fausse en général.

Contre-exemple :
Soit $\Omega = \{0, 1\}$ muni de la probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}(0) := \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(1) := \frac{1}{2}$$

et soit la variable aléatoire X définie par :

$$X(0) := 1, \quad X(1) := 9$$

Alors l'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{10}{2} = 5$$

Prenons $a := \frac{9}{10}$ alors

$$a\mathbb{E}(X) = \frac{9}{10} \cdot 5 = \frac{9}{2}$$

On montre que $X \cdot \mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} \geq (1-a)X$ n'est pas vérifiée en $\omega = 0$.

$$X(0) = 1 < \frac{9}{2} \Rightarrow \mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} = 0$$

À gauche on a :

$$X(0) \cdot \mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}(0) = 1 \cdot 0 = 0$$

À droite on a :

$$(1-a)X(0) = \left(1 - \frac{9}{10}\right) \cdot 1 = \frac{1}{10}$$

Or,

$$0 \ngeq \frac{1}{10}$$

Donc l'inégalité n'est pas vraie et la piste proposée n'aboutit pas.

On a seulement obtenu l'inégalité moins pratique :

$$\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) \geq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

Pourquoi ça ne marche pas ?
Car en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz directement sur X, on perd de l'information.

Étape 2 : Décomposer X

L'idée pour obtenir une inégalité plus précise est la suivante, on décompose X selon l'événement $\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}$:

$$X = X(\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} + \mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}^c})$$

Comme $\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}^c = \{X < a\mathbb{E}(X)\}$,

$$X = X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} + X\mathbf{1}_{\{X < a\mathbb{E}(X)\}}$$

On fait apparaître ainsi le terme $X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}$ de l'inégalité.
Ensuite pour se rapprocher de l'inégalité que l'on cherche, on voudrait se débarrasser intelligemment du terme $X\mathbf{1}_{\{X < a\mathbb{E}(X)\}}$.

Étape 3 : Majorer le terme $X\mathbf{1}_{\{X < a\mathbb{E}(X)\}}$ et prendre l'espérance

Pour cela, on dispose de l'inégalité entre fonctions :

$$X\mathbf{1}_{\{X < a\mathbb{E}(X)\}} \leq a\mathbb{E}(X)$$

En effet, une simple disjonction de cas selon que $\omega \in \Omega$ est tel que $X(\omega) < a\mathbb{E}(X)$ ou non permet de conclure.

Remarque

Cette inégalité n'est pas vraie en général, c'est la positivité de $a\mathbb{E}(X)$ qui la rend vraie. En fait, dès que $b \in \mathbb{R}_+$ et X est une variable aléatoire, on a l'inégalité :

$$X\mathbf{1}_{\{X \leq b\}} \leq b$$

Cela nous donne :

$$X \leq X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} + a\mathbb{E}(X)$$

Par croissance de l'espérance et en utilisant que l'espérance d'une fonction constante est cette constante, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}}) + a\mathbb{E}(X)$$

Donc par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}((1-a)X) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

Enfin comme les deux termes sont positifs, on passe au carré dans cette relation en vue de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}((1-a)X)^2 \leq \mathbb{E}^2(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

Étape 4 : Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}^2(X\mathbf{1}_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}}) \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

Donc par transitivité,

$$\mathbb{E}((1-a)X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}}) \geq \mathbb{E}((1-a)X)^2}$$

Résumé de la preuve

1) décomposer X selon l'événement mis en jeu dans l'indicatrice :

$$X = X(\mathbf{1}_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}} + \mathbf{1}_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}^c})$$

2) Se débarrasser du terme gênant $X\mathbf{1}_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}^c}$ via la majoration :

$$X\mathbf{1}_{\{X<a\mathbb{E}(X)\}} \leq a\mathbb{E}(X)$$

3) Obtenir une inégalité dans 1) grâce à la majoration 2), appliquer l'espérance et réorganiser l'inégalité obtenue :

$$\mathbb{E}((1-a)X) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

4) Passer au carré dans la relation et appliquer **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** au membre de droite :

$$\mathbb{E}((1-a)X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

5) Utiliser $\mathbb{P}(\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}})$ et diviser par $\mathbb{E}(X^2)$ pour obtenir :

$$\boxed{\mathbb{P}(X\geq a\,\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2\frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}}$$