Énoncé

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et ayant un moment d'ordre deux. Soit $a \in]0,1[$. Montrer : $\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

Correction

1) décomposer X selon l'évènement mis en jeu dans l'indicatrice :

$$X = X(\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}} + \mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}^c})$$

2) Se débarasser du terme gênant $X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}^c}$ via la majoration :

$$X\mathbf{1}_{\{X < a\mathbb{E}(X)\}} \leq a\mathbb{E}(X)$$

3) Obtenir une inégalité dans 1) grâce à la majoration 2), appliquer l'espérance et réorganiser l'inégalité obtenue :

$$\mathbb{E}((1-a)X) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

4) Passer au carré dans la relation et appliquer **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** au membre de droite :

$$\mathbb{E}((1-a)X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})$$

5) Utiliser $\mathbb{P}(\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}^2_{\{X \geq a\mathbb{E}(X)\}})$ et diviser par $\mathbb{E}(X^2)$ pour obtenir :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}}$$