Énoncé

Soit X une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie.
Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geq x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\frac{1}{x})$$

Indication : Commencer par le cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Correction

Preuve 1
1) Commencer par supposer $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
2) Ecrire

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \sum_{k=\lceil x \rceil}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

3) En déduire l'inégalité

$$x\mathbb{P}(X \geq x) \leq \sum_{k=\lceil x \rceil}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

4) Comme $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, \mathbb{P}(X = k) < +\infty$, conclure par encadrement

$$x\mathbb{P}(X \geq x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

5) Pour traiter le cas général $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, il faut passer par $\lfloor X \rfloor$ et l'encadrement $\lfloor X \rfloor \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$ qui permet d'obtenir l'encadrement

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq x\mathbb{P}(X \geq x) \leq x\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor + 1 \geq x)$$

6) Montrer que $\lfloor X \rfloor + 1$ vérifie les bonnes hypothèses, lui appliquer le résultat et conclure par le théorème d'encadrement que

$$x\mathbb{P}(X \geq x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

Preuve 2
1) Commencer par supposer $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
2) Ecrire

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$$

et utiliser la convergence de la série et le théorème d'Olivier pour conclure

$$\mathbb{P}(X \geq n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{et} \quad n\mathbb{P}(X \geq n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

3) Grâce à l'inégalité

$$0 \leq x\mathbb{P}(\{X \geq x\}) \leq x\mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\})$$

se ramener à démontrer $x\mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

4) Grâce à l'inégalité

$$0 \leq x\mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\}) \leq \lfloor x \rfloor \mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\}) + \mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\})$$

se ramener à démontrer $\lfloor x \rfloor \mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et $\mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

5) Utiliser la croissance de la partie entière pour déduire de l'étape 2 :

$$\lfloor x \rfloor \mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X \geq \lfloor x \rfloor\}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

6) Conclure grâce à la chaîne d'implications que si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors

$$x\mathbb{P}(\{X \geq x\}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

7) Passer au cas $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ grâce aux inégalités

$$0 \leq x\mathbb{P}(X \geq x) \leq x\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor + 1 \geq x)$$

8) Appliquer le résultat dans le cas discret à $\lfloor X \rfloor + 1$ pour montrer

$$x\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor + 1 \geq x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

9) En déduire, par encadrement,

$$x\mathbb{P}(X \geq x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$