Énoncé

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Correction

Introduction

Quand on demande la nature d'une série, on souhaite savoir si la suite des sommes partielles est convergente ou divergente. Ici, comme la série est à termes positifs, soit elle est convergente soit elle diverge vers $+\infty$.

Un cas particulier

Le premier réflexe naturel est de regarder la nature de la série si on prend $\sigma = \mathrm{Id}$ qui est évidemment une bijection de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

C'est la série harmonique, qui diverge.
On voit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ peut diverger. Mais est-ce toujours le cas ?
Est-ce que la nature de la série dépend de la bijection utilisée ?
A cette étape de la résolution nous ne pouvons rien conclure.

L'importance de la bijection de $\mathbb{N}^*$

Le fait qu'on ait une bijection de $\mathbb{N}^*$ est une hypothèse intrigante. Si on la remplace par une hypothèse plus familière comme une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ alors l'exercice devient trivial. En effet, on ne peut rien conclure.
Prenons par exemple deux bijections classiques de $\mathbb{R}_+^*$ comme $\varphi_1 : x \mapsto x^2$ et $\varphi_2 : x \mapsto \sqrt{x}$. Ces bijections réciproques ont de plus les mêmes propriétés, elles sont strictement croissantes et tendent toutes deux vers $+\infty$ en $+\infty$.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.
D'un côté, on a

$$\frac{\varphi_1(n)}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varphi_1(n)}{n^2}$ diverge grossièrement.

De l'autre côté,

$$\frac{\varphi_2(n)}{n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{3}{2} > 1$ donc la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varphi_2(n)}{n^2}$ converge.
Après avoir exploré les hypothèses de l'énoncé, nous explorons quelques pistes de résolutions.

Idée :
Si on considère deux suites réelles positives u et v, une relation du type

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$$

permet de conclure que
si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

Ce résultat cumulé à la présence du carré $\frac{1}{n^2}$ dans la somme peut faire espérer qu'une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permette de conclure.

Tentative de résolution grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
σ ne s'annule pas car son image est $\mathbb{N}^*$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes donne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma(k)} &\geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\sigma(k)}}{k\sqrt{\sigma(k)}} \right)^2 \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)^2\end{aligned}$$

A partir de cette inégalité, on peut conclure que l'une au moins des séries $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\sigma(k)}{k^2}$, $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sigma(k)}$ diverge.
En particulier, si $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sigma(k)}$ converge, $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\sigma(k)}{k^2}$ diverge nécessairement. (1)
Or, en prenant par exemple, $\sigma = \mathrm{Id}$, $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sigma(k)}$ diverge. Donc $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sigma(k)}$ n'est pas convergente en général et on ne peut pas conclure en utilisant (1) que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\sigma(k)}{k^2}$ diverge.

Un cas particulier qui se traite facilement est le cas σ monotone.

Elimination du cas où σ est monotone

Avant de traiter le cas où σ est quelconque, on peut se demander ce qu'il se passe lorsque σ est monotone.
Nécessairement, σ est strictement monotone par injectivité.

Cas décroissant :
Remarquons que σ ne peut pas être décroissante. En effet, si elle était décroissante, elle serait convergente car elle est minorée par 0. Or, une suite d'entiers convergente est stationnaire. Cette propriété contredit l'injectivité et la surjectivité de σ.

Cas croissant :
Supposons σ strictement croissante. Une application strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ a la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sigma(n) \geq n$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\sigma(n)}{n^2} \geq \frac{1}{n}$$

Par comparaison au terme général de la série harmonique, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.
Ce résultat obtenu dans le cas particulier où σ est monotone nous motive à prouver que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est toujours divergente.
En fait ici, on n'a rien prouvé de plus. La seule permutation strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ est l'identité. En effet, si σ est strictement croissante, σ^{-1} l'est également et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sigma(n) \geq n \quad \text{et} \quad \sigma^{-1}(n) \geq n$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sigma(n) \geq n \quad \text{et} \quad n \leq \sigma(n)$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sigma(n) = n$$

Mais dans le cas où σ est **seulement injective**, si de plus elle est croissante (donc strictement croissante), on a quand même obtenu la divergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Idée :
Le plus naturel ici pour montrer la divergence est de nier le critère de Cauchy pour les séries. Cette notion hors programme est la clé pour résoudre beaucoup d'exercices d'analyse des oraux de concours aux grandes écoles. Ce critère est particulièrement utile lorsqu'il s'agit de montrer qu'une suite diverge et il est de plus très facile à démontrer dans ce sens.

Étape 1 : Utilisation du critère de Cauchy

Ce critère est très simple à comprendre. Il dit juste qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut les un des autres, pourvu qu'on regarde assez loin dans les indices. Formellement,

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} \mid \forall p,q\in\mathbb{N}\ p,q\geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_p-u_q|\leq\varepsilon$$

Le sens direct de l'équivalence est facile à montrer à partir de la définition d'une suite convergente. Il utilise l'inégalité triangulaire avec un « ajouté retranché » de la limite. C'est ce sens qu'on utilise (sa contraposée) pour nier la convergence d'une suite réelle.

Le sens réciproque est plus difficile à montrer mais ça reste un exercice classique de MPSI (en plusieurs questions). Dans les grandes lignes, on montre d'abord que l'assertion implique que la suite est bornée, on applique alors le théorème de Bolzano-Weierstrass pour avoir une valeur d'adhérence puis comme les termes sont très proches les uns des autres au voisinage de $+\infty$, et que certains termes sont très proches de la valeur d'adhérence au voisinage de $+\infty$, ils sont tous très proches de la valeur d'adhérence au voisinage de $+\infty$ et on peut conclure que la suite converge vers cette valeur d'adhérence.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k^2}$.
Soit $p,q\in\mathbb{N}^*$ deux entiers tels que $q>p$.
On regarde $|S_p-S_q|$.

$$|S_q-S_p| = \sum_{k=p+1}^{q}\frac{\sigma(k)}{k^2}$$

La quantité $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q}\frac{\sigma(k)}{k^2}$ s'appelle une tranche de Cauchy.
Nos premières intuitions nous ont poussés à penser que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ divergeait. On cherche donc à minorer $|S_p-S_q|$ par une constante afin de nier le critère de Cauchy et conclure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas.

Par décroissance de la fonction inverse,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{q}\frac{\sigma(k)}{k^2} &\geq \sum_{k=p+1}^{q}\frac{\sigma(k)}{q^2}\\ &\geq \frac{1}{q^2}\sum_{k=p+1}^{q}\sigma(k)\end{aligned}$$

Idée :
Tout l'enjeu réside dans la minoration de $\displaystyle\frac{1}{q^2}\sum_{k=p+1}^{q}\sigma(k)$. Une minoration pas assez fine ne permettra pas de conclure.

Étape 2 : Minoration de la tranche de Cauchy

Une minoration pas assez précise

On peut facilement minorer $\sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k)$ grâce au minimum des éléments de la somme.

$$\begin{aligned}\frac{1}{q^2}\sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k) &\geq \frac{1}{q^2}\sum_{k=p+1}^{q} \min_{k\in\{p+1,\ldots,q\}}\{\sigma(k)\} \\ &\geq \frac{q-p}{q^2}\min_{k\in\{p+1,\ldots,q\}}\{\sigma(k)\}\end{aligned}$$

On peut prendre $q = 2p$ pour voir,

$$\frac{1}{(2p)^2}\sum_{k=p+1}^{2p} \sigma(k) \geq \frac{1}{4p}\min_{k\in\{p+1,\ldots,2p\}}\{\sigma(k)\}$$

Là on est bloqué. On ne peut pas bien minorer $\min_{k\in\{p+1,\ldots,2p\}}\{\sigma(k)\}$. L'image réciproque de 1 pourrait être dans $\{\sigma(p),\ldots,\sigma(2p)\}$ et on aurait $\min_{k\in\{p+1,\ldots,2p\}}\{\sigma(k)\} = 1$. Ce qui donnerait

$$\frac{1}{(2p)^2}\sum_{k=p+1}^{2p} \sigma(k) \geq \frac{1}{4p}$$

qui est une minoration inintéressante car ce qui nous intéresse c'est de minorer la tranche de Cauchy par une constante. Nous n'avons pas encore utilisé la bijectivité de σ et c'est sûrement pour ça qu'on est bloqué. Nous ne pouvons pas utiliser cette hypothèse pour minorer uniformément le min. On revient en arrière pour minorer d'une meilleure façon $\frac{1}{q^2}\sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k)$.

Une minoration fine de $\frac{1}{q^2}\sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k)$

C'est sûrement ici que va intervenir la bijectivité de σ pour minorer la somme.
Comme σ est une bijection, on peut dire que tous les éléments de $\sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k)$ sont **distincts**.
Remarquons que cette propriété ne dépend que de l'injectivité de σ. On a donc une somme de $q-p$ entiers positifs distincts.

Idée

On peut minorer $\sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k)$ par la somme des $q-p$ premiers entiers.

En effet, on démontre par une récurrence triviale la propriété $\mathcal{P}(n) =$ « $\sum_{k=1}^{n} k$ est la plus petite somme de n entiers strictement positifs distincts ». Cette propriété est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n, le plus petit entier distinct des n premiers entiers est $n+1$, donc en l'ajoutant à la somme, on obtient la somme de $n+1$ entiers distincts minimale.

On a donc
$$\sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k) \geq \sum_{k=1}^{q-p} k \quad \text{(on pourra retenir ce résultat)}$$
$$\iff \frac{1}{q^2} \sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k) \geq \frac{1}{q^2} \sum_{k=1}^{q-p} k$$
Or, on sait calculer la somme des $q-p$ premiers entiers,
$$\sum_{k=1}^{q-p} k = \frac{(q-p)(q-p+1)}{2}$$
Ceci nous donne,
$$\frac{1}{q^2} \sum_{k=p+1}^{q} \sigma(k) \geq \frac{(q-p)(q-p+1)}{2q^2}$$
On a le droit de choisir $q = 2p$ dans cette expression. Cela nous permet de minorer facilement l'expression du membre de droite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2p)^2} \sum_{k=p+1}^{2p} \sigma(k) &\geq \frac{(p)(p+1)}{2(2p)^2} \\ &\geq \frac{p+1}{8p} \\ &\geq \frac{p}{8p} \\ \frac{1}{(2p)^2} \sum_{k=p+1}^{2p} \sigma(k) &\geq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

On a obtenu le résultat que l'on voulait.
L'inégalité, donne par transitivité,
$$|S_{2p} - S_p| \geq \frac{1}{8} \tag{2}$$

Étape 3 : La série ne vérifie pas le critère de Cauchy

Conclure grâce aux suites de Cauchy

Comme $(2p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'indices tendant vers $+\infty$ quand $p \to +\infty$ et que S_{2p} et S_p sont toujours distants de $\frac{1}{8}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy donc elle diverge. On peut conclure que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge vers $+\infty$.

Conclure sans les suites de Cauchy

On peut conclure en occultant complètement le raisonnement fait avec les suites de Cauchy de cette façon :
Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, vers $l \in \mathbb{R}$, on aurait, par passage à la limite dans (2)

$$l - l \geq \frac{1}{8} \Longleftrightarrow 0 \geq \frac{1}{8} \quad \text{absurde.}$$

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est une série divergente.
Ainsi on peut réussir l'exercice en regardant $S_{2n} - S_n$, en minorant la tranche et en concluant sans les suites de Cauchy mais ce n'est pas le cadre naturel de l'exercice. □

Remarque :
La démonstration n'utilise pas la surjectivité de σ. Le résultat est donc valable pour toute injection de $\mathbb{N}^*$. Le fait qu'une hypothèse superflue ait été rajoutée complexifie l'exercice car on pourrait se retrouver à creuser une piste liée à la surjectivité qui serait de fait inutile.

Résumé de la preuve

1) Considérer la tranche de Cauchy $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{\sigma(k)}{k^2}$.
2) La minorer en utilisant la décroissance de $x \to \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2p)^2} \sum_{k=p+1}^{2p} \sigma(k)$$

3) Utiliser l'injectivité de σ pour affirmer que

$$\frac{1}{(2p)^2} \sum_{k=p+1}^{2p} \sigma(k) \geq \frac{1}{(2p)^2} \sum_{k=1}^{p} k$$

4) Calculer le membre de droite et le minorer pour arriver à

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{8}$$

5) Conclure que la suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy ou raisonner par l'absurde en supposant qu'elle converge et obtenir l'absurdité $0 \geq \frac{1}{8}$ par passage à la limite dans l'inégalité 4).