Énoncé

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Correction

1) Considérer la tranche de Cauchy $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{\sigma(k)}{k^2}$.

2) La minorer en utilisant la décroissance de $x \to \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2p)^2} \sum_{k=p+1}^{2p} \sigma(k)$$

3) Utiliser l'injectivité de σ pour affirmer que

$$\frac{1}{(2p)^2} \sum_{k=p+1}^{2p} \sigma(k) \geq \frac{1}{(2p)^2} \sum_{k=1}^{p} k$$

4) Calculer le membre de droite et le minorer pour arriver à

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{8}$$

5) Conclure que la suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy ou raisonner par l'absurde en supposant qu'elle converge et obtenir l'absurdité $0 \geq \frac{1}{8}$ par passage à la limite dans l'inégalité 4).