Énoncé

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Quels sont les endomorphismes de E qui stabilisent les hyperplans de E ?

Correction

Introduction

Comme souvent, cet exercice tombé à un oral de polytechnique voie MP est considéré difficile car il nécessite de connaître des résultats hors programme pour avoir une intuition de comment le résoudre. Voyons pas à pas comment on peut le résoudre.

Notons $n := \dim(E) \in \mathbb{N}$.
Enonçons quelques rappels pour bien comprendre l'énoncé.
On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ **stabilise** un sous-espace vectoriel F de E lorsque :

$$u(F) \subset F \ \Leftrightarrow\ \forall x \in F\ u(x) \in F$$

Si on suppose que F est de dimension finie égale à $p \in \mathbb{N}$ et si l'on se donne une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F, alors $u(F) \subset F$ est **équivalent** à la propriété (très utile) :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}\ u(e_i) \in F$$

En toute généralité, **un hyperplan** est le noyau d'une forme linéaire **non nulle**. Lorsque la dimension de l'espace est finie, un hyperplan peut se définir comme un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Etant donné que l'énoncé ne suppose rien sur n, nous pouvons commencer par résoudre l'exercice pour les cas triviaux $n \in \{0, 1\}$ avant de proposer une résolution générale pour des valeurs plus grandes de n.

Etape 1 : Elimination des cas triviaux

Cas n = 0 :
Si $n = 0$, il n'existe pas de sous-espace vectoriel de dimension -1, donc pas d'hyperplan et la question n'a pas de sens dans ce cas.

Cas n = 1 :
Si $n = 1$, l'unique sous-espace vectoriel de dimension 0 est le sous-espace vectoriel $\{0\}$. Tous les endomorphismes de E stabilisent 0 ($u(0) \in \{0\}$).

On suppose maintenant $n \geq 2$.
Le problème n'a plus de solution évidente.

La résolution de cet exercice tient à peu de choses près à la connaissance du résultat ci-dessous.

Lemme : Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stabilise toutes les droites vectorielles si et seulement si c'est une homothétie.

Ce lemme est un résultat du même type que notre exercice. Seulement, il est appliqué à des sous-espaces vectoriels plus petits, les droites vectorielles. Si on le connaît d'avance, cela peut nous aider pour résoudre l'exercice car on peut potentiellement s'inspirer de la démonstration ou s'appuyer dessus pour démontrer un résultat du même type.
Notez que ce résultat est valable en dimension quelconque. On le redémontre dans le cadre de notre exercice (la dimension finie).

Etape 2 : Démonstration du lemme

Sens réciproque
Le sens réciproque de l'équivalence est trivial. En effet, si on considère $(x, \lambda) \in (E \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, une homothétie $x \mapsto \lambda x$ et une droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$, alors $\lambda x \in \mathrm{Vect}(x)$ donc une homothétie stabilise n'importe quelle droite vectorielle.

Sens direct
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise toutes les droites vectorielles.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
D'après l'hypothèse, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ u stabilise $\mathrm{Vect}(e_i)$ donc il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(e_i) = \lambda_i e_i$$

De plus, u stabilise $\mathrm{Vect}(e_1 + \cdots + e_n)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(e_1 + \cdots + e_n) = \lambda(e_1 + \cdots + e_n) \underset{\text{distributivité}}{=} \lambda e_1 + \cdots + \lambda e_n$$

Par linéarité de u, on a aussi :

$$u(e_1 + \cdots + e_n) = u(e_1) + \cdots + u(e_n) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

On en déduit l'égalité :

$$\lambda e_1 + \cdots + \lambda e_n = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

Par **liberté** de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, on en déduit :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lambda_i = \lambda$$

Ainsi,

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad u(e_i) = \lambda e_i$$

L'application linéaire u et l'homothétie $x \mapsto \lambda x$ coïncident sur une base de E donc elles sont égales.

$$\boxed{\text{u est une homothétie.}}$$

A présent, nous disposons des outils nécessaires pour entamer la résolution de l'exercice.

Comment utiliser ce lemme ?

Une classe de solutions particulières
Premièrement, on peut avoir envie de vérifier si **les homothéties** ne seraient pas aussi une classe de fonctions solutions de notre exercice.
Soit $H := \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ un hyperplan de E, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n-1\} \quad \lambda e_i \in \text{Vect}(e_i) \subset \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$$

Donc les homothéties stabilisent tous les hyperplans de E et sont solutions de notre exercice.

La question naturelle que l'on se pose ensuite est de savoir s'il existe d'autres applications linéaires qui stabilisent les hyperplans de E. Donnons quelques arguments en faveur d'une réponse positive à cette question.

La stabilisation « du bas vers le haut »
Considérons pour $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ la propriété
« Stabiliser tous les sous-espaces vectoriels de dimension p ».

Fixons $p \in \{1, \ldots, n-2\}$ et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie la propriété ci-dessus. Alors on montre que u stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension $p+1$.

En effet, soit $F := \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$ un sous-espace vectoriel de dimension $p+1$.
Comme u stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension p, il stabilise $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $\text{Vect}(e_2, \ldots, e_{p+1})$ qui sont de dimension p.

$$\forall i \in \{1, \ldots p\} \quad u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \subset \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$$

et

$$\forall i \in \{2, \ldots p+1\} \quad u(e_i) \in \text{Vect}(e_2, \ldots, e_{p+1}) \subset \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1})$$

Ainsi,

$$\forall i \in \{1, \ldots, p+1\} \quad u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{p+1}) = F$$

Donc u stabilise F.
Ainsi, u stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension $p+1$.

« Stabiliser tous les sous-espaces vectoriels de dimension p. »
$\Longrightarrow$ « Stabiliser tous les sous-espaces vectoriels de dimension $p+1$. »

Par récurrence finie triviale,

« Stabiliser tous les sous-espaces vectoriels de dimension p. »
$\Longrightarrow$ « Stabiliser tous les sous-espaces vectoriels de dimension q, avec $q \geq p$. »

Avec les implications que nous avons démontrées, viennent deux idées :

- Les droites vectorielles étant de dimension 1 et les hyperplans de dimension $n-1$, stabiliser toutes les droites vectorielles implique de stabiliser tous les hyperplans. On redémontre ainsi que les homothéties sont solutions du problème initial.

- On pourrait penser qu'à chaque augmentation de la dimension, on trouve d'avantage d'endomorphismes qui stabilisent tous les sous-espaces d'une même dimension. Ainsi, on pourrait penser que stabiliser tous les hyperplans est une propriété beaucoup moins exigeante que stabiliser toutes les droites vectorielles de E et donc qu'il existerait des applications linéaires qui ne sont pas des homothéties qui stabilisent tous les hyperplans. On va enfait montrer que **ce n'est pas le cas** en dimension finie.

Idée :
Nous avons examiné la propriété de stabilité « du bas vers le haut ». Etant donné qu'on connaît les endomorphismes qui stabilisent toutes les droites vectorielles, on peut naturellement avoir envie d'observer la propriété de stabilité « du haut vers le bas ».
C'est-à-dire, voir si pour un endomorphisme, stabiliser tous les hyperplans de E a un effet de stabilité sur les sous-espaces vectoriels de plus petite dimension.
Pour passer d'hyperplans à des sous-espaces vectoriels de plus petite dimension, on peut penser à les écrire comme **des intersections d'hyperplans**. Voyons comment cela se concrétise.

Etape 3 : Ecrire un droite vectorielle comme intersection d'hyperplans

Avant de prouver rigoureusement que tout sous-espace vectoriel strict de E peut s'écrire comme une intersection finie d'hyperplans, illustrons cette propriété dans $\mathbb{R}^3$.

On considère une droite vectorielle quelconque (tracée en vert). On voit qu'en traçant deux plans vectoriels distincts qui contiennent la droite, leur intersection est réduite à la droite. Nous avons dessiné deux plans particuliers mais il y en a une infini qui peuvent convenir.

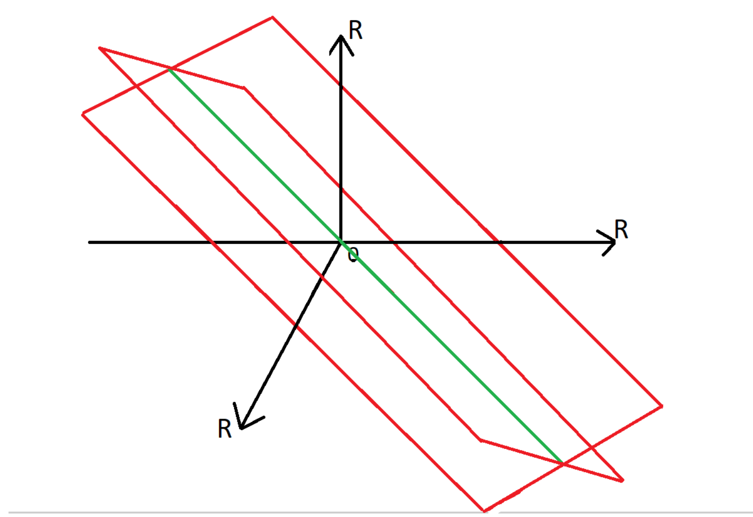

Figure 1 – une droite vectorielle est une intersection d'hyperplans (dans $\mathbb{R}^3$)

Passons à une preuve rigoureuse.
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in \mathbb{N}$ avec $p < n-1$.
Considérons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base de E $(e_1, \dots, e_n)$.

Qu'elle est la famille d'hyperplans dont l'intersection donne exactement F ?

Il faut penser à deux choses.
- Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Introduire **les formes linéaires coordonnées** $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ qui sont définies ainsi :

$$\forall x := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad e_j^*(x) = x_j$$

Alors on a l'équivalence suivante,

$$\begin{aligned} x := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in F &\iff \forall j \in \{p+1, \dots, n\} \quad x_j = 0 \\ &\iff \forall j \in \{p+1, \dots, n\} \quad e_j^*(x) = 0 \\ &\iff \forall j \in \{p+1, \dots, n\} \quad x \in \mathrm{Ker}(e_j^*) \\ &\iff x \in \bigcap_{j=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(e_j^*) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F = \bigcap_{j=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(e_j^*)}$$

Les $\mathrm{Ker}(e_i^*)$ sont évidemment des hyperplans et F est une intersection de $n-p$ hyperplans.
En particulier, si F est une droite vectorielle, c'est une intersection de $n-1$ hyperplans de E.
A partir de ce résultat, nous allons pouvoir conclure quant aux endomorphismes qui stabilisent tous les hyperplans.

Etape 4 : Les endomorphismes qui stabilisent les hyperplans stabilisent les droites vectorielles

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les hyperplans de E. Soit D une droite vectorielle quelconque.
D'après ce qu'on a vu à l'étape 3, on dispose de $n-1$ hyperplans $H_1, \dots, H_{n-1}$ tels que

$$D = \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i$$

D'après l'hypothèse faite sur u,

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \ \forall x_i \in H_i \quad u(x_i) \in H_i$$

Donc

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \quad u(x) \in \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i$$

Cette assertion signifie exactement que u stabilise $\bigcap_{i=1}^{n-1} H_i$.

Comme $D = \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i$, u stabilise D. D étant une droite vectorielle quelconque,
u stabilise toutes les droites vectorielles.

D'après le lemme, u est **une homothétie**.
Réciproquement, on a déjà vu que les homothéties stabilisaient tous les hyperplans.
Nous pouvons conclure que
les endomorphismes qui stabilisent tous les hyperplans sont les homothéties.

Remarques :
- Pour démontrer en dimension quelconque que les endomorphismes qui stabilisent les droites vectorielles sont les homothéties, il suffit de prendre $(x, y) \in E \times E$ non nuls, et de montrer que le λ_x et le λ_y dont l'on dispose d'après la propriété de stabilisation, tels que

$$u(x) = \lambda_x.x \quad \text{et} \quad u(y) = \lambda_y.y$$

sont égaux. On traite séparément les cas (x, y) liée et (x, y) libre.

- A partir des résultats établis dans l'exercice, on peut facilement trouver **les endomorphismes qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de dimension** $p \in \{1, \ldots, n-1\}$**.** En effet, d'après les implications de l'étape 2, de tels endomorphismes stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de dimension $p + 1$ et par récurrence finie, ils stabilisent tous les hyperplans donc ce sont des homothéties.

- On peut aussi démontrer ce résultat en s'inspirant de la démonstration faite pour les hyperplans. Il suffit de remarquer que tout sous-espace vectoriel de dimension $p-1$ est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de dimension p. En effet, soit $F := \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1})$ un sous-espace vectoriel de E de dimension $p - 1$. Complétons $(e_1, \ldots, e_{p-1})$ en une base de E $(e_1, \ldots, e_{p-1}, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Alors, on montre que

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \cap \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1}, e_{p+1})$$

Donc si un endomorphisme stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension p, il stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension $p - 1$. Puis, par récurrence descendante finie, un tel endomorphisme stabilise les droites vectorielles et c'est finalement une homothétie.

Résumé de la preuve

1) Prendre une droite vectorielle quelconque $\mathrm{Vect}(e_1)$. Compléter (e_1) en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1)$ est une intersection d'hyperplans grâce aux formes linéaires coordonnées :

$$\mathrm{Vect}(e_1) = \bigcap_{i=2}^{n} \mathrm{Ker}(e_i^*)$$

2) En déduire qu'un endomorphisme qui stabilise tous les hyperplans stabilise $\mathrm{Vect}(e_1)$.
En effet,

$$\forall i \in \{2, \dots, n\} \quad u(\mathrm{Ker}(e_i^*)) \subset \mathrm{Ker}(e_i^*) \;\Rightarrow\; u(\mathrm{Vect}(e_1)) \subset \mathrm{Vect}(e_1)$$

car il stabilise chaque $\mathrm{Ker}(e_i^*)$.

3) Conclure qu'un endomorphisme qui stabilise tous les hyperplans stabilise toutes les droites vectorielles.

4) Redémontrer que les endomorphismes qui stabilisent toutes les droites vectorielles sont les homothéties.

5) Vérifier que les homothéties stabilisent tous les hyperplans.

6) Conclure que les endomorphismes qui stabilisent tous les hyperplans sont exactement **les homothéties**.