Énoncé

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Quels sont les endomorphismes de E qui stabilisent les hyperplans de E ?

Correction

1) Prendre une droite vectorielle quelconque $\mathrm{Vect}(e_1)$. Compléter (e_1) en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1)$ est une intersection d'hyperplans grâce aux formes linéaires coordonnées :

$$\mathrm{Vect}(e_1) = \bigcap_{i=2}^{n} \mathrm{Ker}(e_i^*)$$

2) En déduire qu'un endomorphisme qui stabilise tous les hyperplans stabilise $\mathrm{Vect}(e_1)$.
En effet,

$$\forall i \in \{2, \ldots, n\} \quad u(\mathrm{Ker}(e_i^*)) \subset \mathrm{Ker}(e_i^*) \;\Rightarrow\; u(\mathrm{Vect}(e_1)) \subset \mathrm{Vect}(e_1)$$

car il stabilise chaque $\mathrm{Ker}(e_i^*)$.

3) Conclure qu'un endomorphisme qui stabilise tous les hyperplans stabilise toutes les droites vectorielles.

4) Redémontrer que les endomorphismes qui stabilisent toutes les droites vectorielles sont les homothéties.

5) Vérifier que les homothéties stabilisent tous les hyperplans.

6) Conclure que les endomorphismes qui stabilisent tous les hyperplans sont exactement **les homothéties**.