Énoncé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n + b_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction

L'énoncé est très simple et compréhensible de tous mais a été posé à un oral de concours très exigeant donc doit certainement cacher quelques difficultés.

1ère preuve utilisant les valeurs d'adhérence

Le 1er réflexe naturel est d'exploiter l'inégalité entre les termes d'indices n et $n+1$.

Etape 1 : Exploitation de l'inégalité de récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dispose de cette inégalité :

$$a_{n+1} \leq a_n + b_n$$

C'est une situation à laquelle on est habitué depuis le lycée permettant de remonter à une inégalité uniquement en fonction de a_n et des b_n.
De façon informelle, en décalant d'un rang,

$$a_n \leq a_{n-1} + b_{n-1}$$

En injectant cette nouvelle inégalité dans celle initiale, on obtient par transitivité de $(\leq)$,

$$a_{n+1} \leq a_n + b_n \leq (a_{n-1} + b_{n-1}) + b_n$$

Donc

$$a_{n+1} \leq a_{n-1} + b_{n-1} + b_n$$

En utilisant cette fois $a_{n-1} \leq a_{n-2} + b_{n-2}$, on a

$$a_{n+1} \leq a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n$$

On comprend qu'en itérant ce processus jusqu'à atteindre a_0 à droite (premier terme de la suite), on aura :

$$a_{n+1} \leq a_0 + b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} + b_n$$

Soit formellement,

$$a_{n+1} \leq a_0 + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Il y a deux façons de prouver cette inégalité obtenue par un raisonnement informel, de proche en proche :

— la récurrence

— le télescopage

La récurrence est vraiment facile à établir mais elle est longue à **bien** rédiger. Je privilégie lorsque c'est possible un raisonnement direct grâce à un télescopage. C'est souvent possible lorsque l'on travaille avec des suites.

On a

$$a_{n+1} - a_n \leq b_n$$

L'entier n étant fixé quelconque, cette relation est valable peu importe
l'entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$\forall\ k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad a_{k+1} - a_k \leq b_k$$

On somme cette relation pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

Ce qui donne par télescopage,

$$a_n - a_0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} b_k \ \Leftrightarrow \ \boxed{a_n \leq a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k}$$

Enfin comme les b_n sont positifs, on dispose de l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Rappelons que $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ signifie $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k$ et qu'une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour avoir

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n-1} b_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

est d'avoir $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante et elle est inférieure à sa limite $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$, qui existe toujours dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On injecte

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

dans

$$a_n \leq a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

Ce qui fournit

$$a_n \leq a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k < +\infty$$

De plus, par hypothèse, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \leq a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée**.

Analyse de ce qui a été fait

Nous avons utilisé **toutes les hypothèses** de l'énoncé mais nous ne sommes parvenus qu'à montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Nous nous sommes tout de même rapprochés de la solution car les suites convergentes sont bornées. Parmi les suites bornées, celles qui convergent sont celles admettant une unique valeur d'adhérence (cours MPSI). D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence. Si l'on montre que cette valeur d'adhérence est unique, on aura la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est peut-être une piste qui permettra de conclure.

Idée :
Nous avons exploité l'inégalité de base pour borner supérieurement la différence entre a_n et a_0. Plutôt que de comparer uniquement a_n à a_0 on peut introduire un paramètre $m \in \mathbb{N}$ et comparer a_n à a_m et espérer obtenir plus d'information sur a_n étant donné que l'on s'offre un degré de liberté supplémentaire avec m.

Etape 2 : Raffinement de l'inégalité

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n < m$.
On somme l'inégalité $a_{n+1} - a_n \leq b_n$ entre n et $m-1$:

$$\sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} b_k$$

Ce qui donne, par télescopage :

$$a_m - a_n \leq \sum_{k=n}^{m-1} b_k \ \Leftrightarrow a_m \leq a_n + \sum_{k=n}^{m-1} b_k$$

Ensuite, on remarque que l'on peut se débarasser du m dans la somme tout en gardant un bon contrôle sur a_m . En effet, on utilise la majoration $\sum_{k=n}^{m-1} b_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$ (valable car les $b_n, \ n \in \mathbb{N}$ sont positifs), avec $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une série convergente).
Donc

$$a_m \leq a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Considérons un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ à partir duquel :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leq \varepsilon$$

On a donc :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad m > n \geq N_\varepsilon \ \Rightarrow \ a_m \leq a_n + \varepsilon$$

On a beaucoup de liberté sur les choix de n et m dans cette inégalité. D'après ce qui a été dit, on peut penser à faire intervenir des valeurs d'adhérence de la suite, pour voir si cela fait avancer la résolution.

Rappel :
Les valeurs d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les réels K vérifiant l'une de ces deux propriétés équivalentes :
1) Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} K$
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}, n > N \mid |a_n - K| < \varepsilon$

Clarifions le sens de la 2ème propriété. Cette assertion signifie qu'aussi loin que l'on soit dans les indices de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pourra trouver un terme a_n aussi proche que l'on veut de K. Je privilégie cette approche ici car elle est plus économe en rédaction. En effet, utiliser la définition avec l'extraction nécessite d'introduire la valeur d'adhérence, l'extraction, le rang à partir duquel $a_{\varphi(n)}$ est ε-proche, se placer au-delà de ce rang. Tandis que la deuxième approche nécessite uniquement d'introduire la valeur d'adhérence et le rang donné par la définition.

Etape 3 : Introduction d'une valeur d'adhérence quelconque

Soit K une valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Appliquons la 2ème propriété avec ε et N_ε. On dispose de $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon > N_\varepsilon$ tel que :

$$K - \varepsilon \leq a_{n_\varepsilon} \leq K + \varepsilon$$

En utilisant cette majoration dans $a_m \leq a_n + \varepsilon$, on trouve :

$$\forall m > n_\varepsilon \quad a_m \leq (K + \varepsilon) + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall m > n_\varepsilon \quad a_m \leq K + 2\varepsilon$$

Cette inégalité est très intéressante. Tous les termes de la suite sont **presque** inférieurs à K (qui est une valeur d'adhérence quelconque) à partir d'un certain rang n_ε.

Idée :
Si on applique cette inégalité avec un m bien choisi, par exemple tel que a_m soit proche d'une autre valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on va pouvoir en déduire une inégalité valable peu importe le couple de valeurs d'adhérence choisi.

Etape 4 : Introduction d'une deuxième valeur d'adhérence quelconque

Considérons une autre valeur d'adhérence L de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dispose d'un rang $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ tel que $L - \varepsilon < a_{m_\varepsilon} < L + \varepsilon$. Par transitivité de $(<)$,

$$L - \varepsilon < K + 2\varepsilon \ \Leftrightarrow L < K + \varepsilon$$

En laissant tendre ε vers 0, ce qui est licite car l'inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$ et K et L ne dépendent pas de ε, on obtient

$$L \leq K \quad \text{(l'inégalité devient large)}$$

Si on avait initialement choisi L puis K, le même raisonnement donnerait

$$K \leq L$$

$$\text{Donc } \boxed{K = L} \text{ (antisymétrie de } (\leq)).$$

Ce qui est important ici est d'avoir pris K et L quelconque, ce qui permet d'échanger leurs rôles dans l'inégalité obtenue. On dit que K et L ont des rôles symétriques.

Conclusion :
On a montré que deux valeurs d'adhérence quelconque de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étaient nécessairement égales. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède **au plus une valeur d'adhérence**. On sait d'après ce qui précède (Bolzano-Weierstrass) qu'elle en admet **au moins une**.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée possédant une unique valeur d'adhérence, elle converge.

Remarque :
Lorsque j'ai initialement résolu l'exercice, en arrivant à l'inégalité

$$\forall m > n_\varepsilon \quad a_m \leq K + 2\varepsilon$$

J'ai immédiatement pensé à travailler avec $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ qui est **la plus grande** valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par définition,

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} a_p$$

En effet, l'inégalité pour tout $m > n_\varepsilon \quad a_m \leq K + 2\varepsilon$ permet d'obtenir $\sup\limits_{p\geq n_\varepsilon} a_p \leq K + 2\varepsilon$. La décroissance de la suite $(\sup\limits_{p\geq n} a_p)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa convergence vers $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ permettent de passer à la limite dans l'inégalité ci-dessous :

$$\forall n \geq n_\varepsilon \quad \sup_{p\geq n} a_p \leq \sup_{p\geq n_\varepsilon} a_p \leq K + 2\varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} a_p \leq K + 2\varepsilon$$

Toujours en laissant ε tendre vers 0,

$$\Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} a_n \leq K$$

Puis comme $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \geq K$$

Au final $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = K$. K étant une valeur d'adhérence quelconque, on a montré que la seule valeur d'adhérence possible de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, ce qui permet de conclure ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée), qu'elle converge.
Malheureusement, la notion de $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ est hors programme du programme de classe préparatoire scientifique. Il faudra être en mesure de justifier ses propriétés si on l'invoque. Soulignons qu'une preuve classique du théorème de Bolzano -Weirstrass consiste à construire une suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. Enfin, l'étude des propriétés de $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ ont fait l'objet de 4 questions sur les 20 du sujet Mines Ponts Maths 1 MP 2018.

2ème preuve par décroissance globale

La preuve que je vais présenter ici est simple à comprendre mais beaucoup plus astucieuse.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dispose de l'inégalité fournie par l'énoncé :

$$a_{n+1} \leq a_n + b_n$$

Idée :
Cette inégalité nous informe sur l'augmentation maximale entre deux pas de la suite. Entre a_n et a_{n+1} on peut gagner au plus b_n, entre a_{n+1} et a_{n+2}, au plus b_{n+1}, et ainsi de suite. Ainsi, à partir du rang n, la suite $(a_p)_{p\geq n}$ possède **une marge maximale d'augmentation** donnée par

$$b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k.$$

Or plus n augmente, plus cette augmentation potentielle de $(a_p)_{p\geq n}$ diminue :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

la quantité de droite représentant la marge maximale de $(a_p)_{p\geq n+1}$.
Par conséquent, en considérant la suite $(a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire "valeur actuelle + potentiel d'augmentation", on obtient une quantité décroissante avec n.
Formalisons.
Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après l'inégalité $a_{n+1} \leq a_n + b_n$,

$$S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \leq a_n + b_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

$$\Leftrightarrow \ S_{n+1} \leq a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \Leftrightarrow \boxed{S_{n+1} \leq S_n}$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0 (tous ses termes sont positifs), elle converge. Notons $s \in \mathbb{R}_+$ sa limite.
On écrit :

$$a_n = S_n - \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s - 0 = s$$

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } s.}$$

Résumé des preuves

Preuve 1 : par valeurs d'adhérence

1) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée grâce aux 2 inégalités données par l'énoncé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} \leq a_n + b_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \leq a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

2) Toujours en considérant l'inégalité de base, montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m > n \Rightarrow a_m \leq a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

3) Fixer $\varepsilon > 0$. Utiliser $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et considérer une valeur d'adhérence K pour montrer

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall m > n_\varepsilon \quad a_m \leq K + 2\varepsilon$$

4) Considérer une autre valeur d'adhérence L pour montrer que

$$L < K + \varepsilon$$

5) Laisser ε tendre vers 0, pour obtenir $L \leq K$. Invoquer le rôle symétrique de L et K pour conclure $L = K$. Conclure que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car bornée + unique valeur d'adhérence.

Preuve 2 : par décroissance globale

1) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante grâce à $a_{n+1} \leq a_n + b_n$.

2) Conclure grâce à

$$a_n = S_n - \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s - 0 = s$$