## Énoncé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n + b_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

## Correction

### Preuve 1 : par valeurs d'adhérence

1) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée grâce aux 2 inégalités données par l'énoncé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} \leq a_n + b_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \leq a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

2) Toujours en considérant l'inégalité de base, montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m > n \Rightarrow a_m \leq a_n + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

3) Fixer $\varepsilon > 0$. Utiliser $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et considérer une valeur d'adhérence $K$ pour montrer

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall m > n_\varepsilon \quad a_m \leq K + 2\varepsilon$$

4) Considérer une autre valeur d'adhérence $L$ pour montrer que

$$L < K + \varepsilon$$

5) Laisser $\varepsilon$ tendre vers 0, pour obtenir $L \leq K$. Invoquer le rôle symétrique de $L$ et $K$ pour conclure $L = K$. Conclure que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car bornée + unique valeur d'adhérence.

### Preuve 2 : par décroissance globale

1) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante grâce à $a_{n+1} \leq a_n + b_n$.

2) Conclure grâce à

$$a_n = S_n - \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s - 0 = s$$