Énoncé

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On suppose que $X \geq 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$.
Montrer que : X = 0 presque sûrement i.e $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1$.

Correction

Preuve 1 :

1) Récupérer l'info donnée par $\mathbb{E}(X) = 0$: $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(X = x_n) = 0$
2) Partir de $\mathbb{P}(X \in \{x_n, n \in \mathbb{N}\}) = 1$ et utiliser la σ-additivé :
   $\mathbb{P}(X \in \{x_n, n \in \mathbb{N}\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{X = x_n\}$
3) Réécrire $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{X = x_n\} = 1$ en séparant $\mathbb{P}(\{X = 0\})$ du reste des
   $\mathbb{P}(\{X = x_n\}),\ n \in \mathbb{N}$.

Preuve 2 :

1) Récupérer l'info donnée par $\mathbb{E}(X) = 0$: $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(X = x_n) = 0$
2) Considérer l'événement complémentaire : $\{X > 0\}$
3) Le réécrire comme une union **dénombrable** d'évènements de probabilité nulle
   $\{X > 0\} = \bigcup_{n\in A}\{X = x_n\}$
4) Appliquer la σ-additivité (licite) ou l'inégalité de Boole à $\bigcup_{n\in A}\{X = x_n\}$

Preuve 3 :

1) Considérer l'événement complémentaire : $\{X > 0\}$
2) Le réécrire comme une union **dénombrable** :$\{X > 0\} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X > \frac{1}{2^n}\}$
3) Appliquer l'inégalité de Boole : $\mathbb{P}(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X > \frac{1}{2^n}\}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\{X > \frac{1}{2^n}\}$
4) Appliquer l'inégalité de Markov : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}\{X > \frac{1}{2^n}\} \leq 2^n\mathbb{E}(X) = 0$
5) Conclure que $\mathbb{P}\{X > 0\} \leq 0$